

APPUNTI DI GEOMETRIA

SECONDO SEMESTRE

Anno 2025/26 • Prof. DI GENNARO VINCENZO

Diego Marini

diego@marini.work | marini.work

Ultimo aggiornamento: 13 marzo 2026

NOTA: appunti personali in continuo aggiornamento. Possibili errori: segnalazioni benvenute.

INDICE

1	Strutture algebriche e Spazi vettoriali	2
1.1	Notazione e convenzioni	2
1.2	Operazioni su un insieme	2
1.2.1	Operazione interna	2
1.2.2	Operazione esterna	3
1.3	Definizione di spazio vettoriale	3
1.3.1	Assiomi (regole di calcolo)	3
1.4	Proprietà di calcolo in uno spazio vettoriale	5
1.5	Dimostrazioni delle proprietà di calcolo	5
1.6	Esempi di spazi vettoriali	10
1.6.1	Verifica degli assiomi in \mathbb{R}^2	11
1.7	Lo spazio \mathbb{R}^n	11
1.8	Lo spazio delle matrici $\mathcal{M}(m, n)$	13
1.9	Lo spazio dei polinomi	14
1.9.1	Lo spazio dei vettori geometrici	16
1.10	Sottospazi	18
1.11	Combinazioni lineari	29
1.12	Sottospazio generato	31
1.13	Esercizi dal file del professore	31
1.14	Sottospazio vettoriale generato da un insieme	36
1.14.1	Esempi	36
1.15	Proprietà del sottospazio generato	37
1.15.1	Dimostrazione delle proprietà	37
1.16	Esercizio	40
1.17	Sistemi di generatori e spazi vettoriali finitamente generabili	42
1.17.1	Esempi	42
1.18	Gli spazi geometrici sono finitamente generabili	45
1.19	Sistemi di vettori linearmente indipendenti	49
1.19.1	Esempi	50
1.19.2	Proprietà dei sistemi liberi e dei sistemi legati	53
1.19.3	Dimostrazioni	54
1.19.4	Criterio operativo per riconoscere un vettore sovrabbondante	57
1.19.5	Esempio: un vettore sovrabbondante	58
1.19.6	Esercizio: determinare un sistema di generatori libero per W	58

1 STRUTTURE ALGEBRICHE E SPAZI VETTORIALI

1.1 Notazione e convenzioni

Nel seguito adotteremo le seguenti convenzioni.

- I vettori si indicano con lettere minuscole sottolineate:

$$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \dots$$

e appartengono a un insieme V .

- I numeri si indicano con lettere minuscole dell'alfabeto:

$$a, b, c, \dots$$

e, in questa fase, li consideriamo numeri reali.

- La somma tra vettori si indica con il simbolo usuale $+$:

$$\underline{u} + \underline{v}.$$

- Il prodotto tra un numero e un vettore si indica per semplice giustapposizione:

$$a\underline{u}.$$

- Il vettore nullo si indica con $\underline{0}$ ed è tale che

$$\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}.$$

- L'opposto di \underline{u} si indica con $-\underline{u}$ ed è definito da

$$\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}.$$

1.2 Operazioni su un insieme

Per costruire una struttura algebrica su un insieme è necessario definire una o più operazioni che permettano di combinare tra loro gli elementi dell'insieme.

Un'operazione è una legge che associa a uno o più elementi un nuovo elemento.

Nel caso degli spazi vettoriali (ovvero una struttura algebrica con determinate caratteristiche) compaiono due tipi di operazioni:

- operazione interna
- operazione esterna

1.2.1 Operazione interna

Sia V un insieme. Si chiama **operazione interna** su V una funzione

$$* : V \times V \longrightarrow V$$

che associa ad ogni coppia $(\underline{u}, \underline{v})$ un elemento

$$\underline{u} * \underline{v} \in V.$$

Un'operazione è detta interna perché combina due elementi di V e restituisce ancora un elemento di V .

Esempio. La somma tra vettori

$$\underline{u} + \underline{v}$$

è un'operazione interna se il risultato appartiene ancora a V .

Osservazione. Affinché una legge sia un'operazione interna deve valere la proprietà di *chiusura*: il risultato deve appartenere allo stesso insieme di partenza.

1.2.2 Operazione esterna

Negli spazi vettoriali interviene una seconda operazione, che combina un numero con un vettore.

Sia V un insieme di vettori. Si chiama **operazione esterna** una funzione

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

che ad ogni coppia (a, \underline{u}) associa un vettore

$$a\underline{u} \in V.$$

L'operazione è detta esterna perché combina elementi di due insiemi diversi: numeri reali e vettori.

Esempio. Se $V = \mathbb{R}^2$ e $\underline{u} = (x, y)$, allora

$$a\underline{u} = (ax, ay).$$

Il risultato appartiene ancora a \mathbb{R}^2 .

1.3 Definizione di spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica munita di:

- una somma tra vettori (operazione interna),
- un prodotto tra numero reale e vettore (operazione esterna),

che soddisfano determinate regole di calcolo (sono 8).

1.3.1 Assiomi (regole di calcolo)

Siano $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1. Proprietà associativa della somma

$$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$$

2. Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma

Esiste $\underline{0} \in V$ tale che

$$\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$$

3. Esistenza dell'opposto rispetto alla somma

Per ogni $\underline{u} \in V$ esiste $-\underline{u} \in V$ tale che

$$\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$$

4. Proprietà commutativa della somma

$$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$$

5. Proprietà associativa del prodotto per numero

$$a(b\underline{u}) = (ab)\underline{u}$$

6. Elemento neutro del prodotto per numero

$$1\underline{u} = \underline{u}$$

7. Proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori

$$a(\underline{u} + \underline{v}) = a\underline{u} + a\underline{v}$$

8. Proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri

$$(a + b)\underline{u} = a\underline{u} + b\underline{u}$$

Esercizio 1.1 (Uso delle regole di calcolo). Siano $\underline{u}, \underline{v} \in V$. Semplificare l'espressione

$$E = 5\underline{u} + 3\underline{v} + 2\underline{u}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che

$$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \quad (\text{assioma 4}).$$

$$E = 5\underline{u} + 3\underline{v} + 2\underline{u} = 5\underline{u} + 2\underline{u} + 3\underline{v}$$

Applichiamo la distributività (assioma 8):

$$= (5 + 2)\underline{u} + 3\underline{v} = 7\underline{u} + 3\underline{v}.$$

Osservazione 1.2. L'insieme $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con le operazioni usuali è uno spazio vettoriale.

Consideriamo invece l'operazione definita su \mathbb{R} da

$$x \oplus y = x + 2y.$$

Allora $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ non è uno spazio vettoriale, poiché l'operazione \oplus non è associativa. Infatti, ad esempio:

$$(1 \oplus 1) \oplus 1 = (1 + 2) \oplus 1 = 3 \oplus 1 = 5,$$

$$1 \oplus (1 \oplus 1) = 1 \oplus (1 + 2) = 1 \oplus 3 = 1 + 6 = 7.$$

Poiché i due risultati sono diversi, l'operazione \oplus non è associativa.

1.4 Proprietà di calcolo in uno spazio vettoriale

Dagli assiomi si deducono le seguenti proprietà fondamentali.

Siano $a \in \mathbb{R}$ e $\underline{u}, \underline{v} \in V$.

1. Unicità del vettore nullo

Il vettore nullo è unico.

2. Unicità dell'opposto

Per ogni $\underline{u} \in V$ l'opposto è unico.

3. Prodotto di un numero per il vettore nullo

$$a\underline{0} = \underline{0}.$$

4. Prodotto dello zero per un vettore

$$0\underline{u} = \underline{0}.$$

5. Legge di annullamento del prodotto

$$a\underline{u} = \underline{0} \iff a = 0 \text{ oppure } \underline{u} = \underline{0}.$$

6. Regole dei segni

$$(-a)\underline{u} = -(a\underline{u}) = a(-\underline{u}),$$

$$(-a)(-\underline{u}) = a\underline{u}.$$

7. Equazione lineare in V

Per ogni $a \neq 0$ e per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esiste un unico vettore $\underline{x} \in V$ tale che

$$a\underline{x} + \underline{u} = \underline{v} \quad (\text{equazione di primo grado in } V)$$

Tale vettore è dato da

$$\underline{x} = \frac{1}{a}(\underline{v} - \underline{u}).$$

1.5 Dimostrazioni delle proprietà di calcolo

1) **Unicità del vettore nullo.** Se $\underline{0}, \underline{0}' \in V$ sono vettori nulli, allora

$$\underline{0} = \underline{0}'.$$

Dimostrazione. Siano $\underline{0}, \underline{0}' \in V$ due vettori nulli.

Poiché $\underline{0}$ è vettore nullo,

$$\underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}'.$$

Poiché $\underline{0}'$ è vettore nullo,

$$\underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}.$$

Ne segue che

$$\underline{0}' = \underline{0}.$$

□

2) **Unicità dell'opposto.** Sia $\underline{u} \in V$. Se esistono $\underline{w}, \underline{w}' \in V$ tali che

$$\begin{cases} \underline{u} + \underline{w} = \underline{0} \\ \underline{u} + \underline{w}' = \underline{0} \end{cases} \implies \underline{w} = \underline{w}'.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \underline{w} + \underline{0} \\ &= \underline{w} + (\underline{u} + \underline{w}') \\ &= (\underline{w} + \underline{u}) + \underline{w}' \quad (\text{associatività}) \\ &= \underline{0} + \underline{w}' \\ &= \underline{w}'. \end{aligned}$$

□

Osservazione.

$$-\underline{0} = \underline{0}.$$

Infatti $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, quindi il vettore nullo coincide con il proprio opposto.

3) $a \cdot \underline{0} = \underline{0}$

Dimostrazione. Poiché $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$, si ha

$$a\underline{0} = a(\underline{0} + \underline{0}).$$

Per la proprietà distributiva,

$$a\underline{0} = a\underline{0} + a\underline{0}.$$

Sommiamo l'opposto di $a\underline{0}$ a entrambi i membri:

$$a\underline{0} + (-a\underline{0}) = (a\underline{0} + a\underline{0}) + (-a\underline{0}).$$

Per associatività della somma,

$$\underline{0} = a\underline{0} + (a\underline{0} + (-a\underline{0})).$$

Poiché $a\underline{0} + (-a\underline{0}) = \underline{0}$, segue

$$\underline{0} = a\underline{0} + \underline{0}.$$

Quindi

$$\underline{0} = a\underline{0}.$$

□

4) $0\underline{u} = \underline{0}$

Dimostrazione. Poiché $0 = 0 + 0$, si ha

$$0\underline{u} = (0 + 0)\underline{u}.$$

Per la proprietà distributiva,

$$(0 + 0)\underline{u} = 0\underline{u} + 0\underline{u}.$$

Quindi

$$0\underline{u} = 0\underline{u} + 0\underline{u}.$$

Sommiamo l'opposto di $0\underline{u}$ a entrambi i membri:

$$0\underline{u} + (-(0\underline{u})) = (0\underline{u} + 0\underline{u}) + (-(0\underline{u})).$$

Per associatività della somma,

$$\underline{0} = 0\underline{u} + (0\underline{u} + (-(0\underline{u}))).$$

Poiché $0\underline{u} + (-(0\underline{u})) = \underline{0}$, segue

$$\underline{0} = 0\underline{u} + \underline{0}.$$

Quindi

$$\underline{0} = 0\underline{u}.$$

□

5) Legge di annullamento del prodotto.

$$a\underline{u} = \underline{0} \iff a = 0 \text{ oppure } \underline{u} = \underline{0}.$$

Dimostrazione. (\Leftarrow)

Se $a = 0$, allora

$$a\underline{u} = 0\underline{u} = \underline{0}$$

per la proprietà (4).

Se $\underline{u} = \underline{0}$, allora

$$a\underline{u} = a\underline{0} = \underline{0}$$

per la proprietà (3).

(\Rightarrow)

Sia

$$a\underline{u} = \underline{0}.$$

Se $a = 0$, allora

$$a\underline{u} = 0\underline{u} = \underline{0}$$

per la proprietà (4), e quindi vale l'alternativa $a = 0$.

Se $a \neq 0$, poiché a è un numero reale non nullo, esiste il suo inverso moltiplicativo $\frac{1}{a}$. Moltiplicando entrambi i membri per $\frac{1}{a}$, si ottiene

$$\frac{1}{a}(a\underline{u}) = \frac{1}{a}\underline{0}.$$

Per associatività del prodotto per numero,

$$\left(\frac{1}{a}\right)\underline{u} = \underline{0}.$$

Poiché $\frac{1}{a}a = 1$, segue

$$1\underline{u} = \underline{0}.$$

Per la proprietà dell'elemento neutro del prodotto,

$$1\underline{u} = \underline{u},$$

quindi

$$\underline{u} = \underline{0}.$$

□

6) Regole dei segni

Dimostrazione. Consideriamo la somma

$$a\underline{u} + (-a)\underline{u}.$$

Per la proprietà (8) (distributività rispetto alla somma tra numeri), si ha

$$a\underline{u} + (-a)\underline{u} = (a + (-a))\underline{u}.$$

Poiché $a + (-a) = 0$, segue

$$(a + (-a))\underline{u} = 0\underline{u}.$$

Per la proprietà (4),

$$0\underline{u} = \underline{0}.$$

Quindi

$$a\underline{u} + (-a)\underline{u} = \underline{0}.$$

Per unicità dell'opposto, si conclude

$$(-a)\underline{u} = -(a\underline{u}).$$

□

7) Equazione lineare in V .

Sia $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in V$ l'equazione

$$a\underline{x} + \underline{u} = \underline{v}$$

ammette un'unica soluzione $\underline{x} \in V$, data da

$$\underline{x} = \frac{1}{a}(\underline{v} - \underline{u}).$$

Dimostrazione. Esistenza.

Poniamo

$$\underline{x} = \frac{1}{a}(\underline{v} - \underline{u}).$$

Allora

$$a\underline{x} = a \left(\frac{1}{a}(\underline{v} - \underline{u}) \right) = \left(a \frac{1}{a} \right) (\underline{v} - \underline{u}) = 1(\underline{v} - \underline{u}) = \underline{v} - \underline{u}.$$

Quindi

$$a\underline{x} + \underline{u} = (\underline{v} - \underline{u}) + \underline{u} = \underline{v}.$$

Unicità.

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in V$ tali che

$$\begin{cases} a\underline{x} + \underline{u} = \underline{v} \\ a\underline{y} + \underline{u} = \underline{v} \end{cases}$$

Allora

$$a\underline{x} + \underline{u} = a\underline{y} + \underline{u}.$$

Sommiamo $-\underline{u}$ a entrambi i membri:

$$a\underline{x} = a\underline{y}.$$

Moltiplichiamo per $\frac{1}{a}$:

$$\frac{1}{a}(a\underline{x}) = \frac{1}{a}(a\underline{y}).$$

Per associatività,

$$\left(\frac{1}{a}\right)\underline{x} = \left(\frac{1}{a}\right)\underline{y}.$$

Poiché $\frac{1}{a}a = 1$, segue

$$1\underline{x} = 1\underline{y}.$$

Quindi

$$\underline{x} = \underline{y}.$$

□

Esercizio 1.3. Siano $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n \in V$ e siano $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_1 \neq 0$.

Dimostrare che, se

$$a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + \dots + a_n\underline{u}_n = \underline{0},$$

allora

$$\underline{u}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\underline{u}_2 - \frac{a_3}{a_1}\underline{u}_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1}\underline{u}_n.$$

Svolgimento.

Sia

$$a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + \dots + a_n\underline{u}_n = \underline{0}, \quad a_1 \neq 0.$$

Sommiamo l'opposto di $a_2\underline{u}_2 + \dots + a_n\underline{u}_n$ a entrambi i membri (usando le regole dei segni, proprietà (6)):

$$a_1\underline{u}_1 = -(a_2\underline{u}_2 + \dots + a_n\underline{u}_n).$$

Poiché $a_1 \neq 0$, per la proprietà (7) possiamo moltiplicare per $\frac{1}{a_1}$ e otteniamo

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{a_1} \left(-(a_2\underline{u}_2 + \dots + a_n\underline{u}_n) \right).$$

Per le regole dei segni (proprietà (6)),

$$\underline{u}_1 = -\frac{1}{a_1} (a_2\underline{u}_2 + \dots + a_n\underline{u}_n).$$

Applicando la distributività rispetto alla somma di vettori (proprietà (7)) e la distributività rispetto alla somma di numeri (proprietà (8)), segue

$$\underline{u}_1 = -\left(\frac{a_2}{a_1}\underline{u}_2 + \frac{a_3}{a_1}\underline{u}_3 + \dots + \frac{a_n}{a_1}\underline{u}_n \right).$$

Infine, usando ancora le regole dei segni (proprietà (6)),

$$\underline{u}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\underline{u}_2 - \frac{a_3}{a_1}\underline{u}_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1}\underline{u}_n.$$

1.6 Esempi di spazi vettoriali

Esempio 1.4. Sia $V = \{*\}$ un insieme costituito da un solo elemento.

Definiamo le operazioni su V ponendo

$$* + * = *, \quad a* = * \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.$$

Allora $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Infatti l'unico elemento $*$ svolge il ruolo di vettore nullo, cioè

$$\underline{0} = *,$$

e coincide con il proprio opposto:

$$-* = *.$$

Questo spazio si chiama **spazio nullo**.

Esempio 1.5. Lo spazio $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, con le operazioni usuali di somma e moltiplicazione per numero reale, è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

In questo caso:

$$\underline{0} = 0, \quad \underline{u} = x \text{ con } x \in \mathbb{R}, \quad -\underline{u} = -x.$$

Infatti la somma e il prodotto per numero soddisfano tutti gli assiomi di spazio vettoriale.

Esempio 1.6. Lo spazio \mathbb{R}^2 è l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Un elemento generico di \mathbb{R}^2 si scrive

$$\underline{x} = (x_1, x_2),$$

dove x_1 è la prima componente e x_2 la seconda componente.

Due vettori sono uguali se e solo se coincidono componente per componente:

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2. \end{cases}$$

Ad esempio,

$$(1, 0), \quad (0, 0), \quad (\sqrt{7}, -21) \in \mathbb{R}^2.$$

Attenzione.

$$(1, 0) \neq (0, 1).$$

Le operazioni sono definite componente per componente:

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$a\underline{x} = (ax_1, ax_2), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Con queste operazioni, \mathbb{R}^2 è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Il vettore nullo è

$$\underline{0} = (0, 0),$$

poiché

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2).$$

L'opposto di $\underline{x} = (x_1, x_2)$ è

$$-\underline{x} = (-x_1, -x_2).$$

1.6.1 Verifica degli assiomi in \mathbb{R}^2

Mostriamo che le operazioni definite componente per componente soddisfano gli assiomi di spazio vettoriale.

Associatività della somma.

Siano

$$\underline{x} = (x_1, x_2), \quad \underline{y} = (y_1, y_2), \quad \underline{z} = (z_1, z_2).$$

Allora

$$(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) = ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2).$$

Poiché l'addizione in \mathbb{R} è associativa,

$$((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)).$$

Quindi

$$(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}).$$

Altre proprietà.

Le restanti proprietà (elemento neutro, opposto, distributività e associatività del prodotto per numero) si verificano analogamente, poiché discendono dalle corrispondenti proprietà valide in \mathbb{R} .

Esercizio 1.7. Calcolare le componenti del seguente vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\underline{x} = 2(-1, 3) + \sqrt{7}(1, -\sqrt{7}) - 5(0, 1).$$

Svolgimento.

Calcoliamo separatamente i prodotti per numero:

$$2(-1, 3) = (-2, 6), \quad \sqrt{7}(1, -\sqrt{7}) = (\sqrt{7}, -7), \quad -5(0, 1) = (0, -5).$$

Sommiamo ora componente per componente:

$$\underline{x} = (-2, 6) + (\sqrt{7}, -7) + (0, -5) = (\sqrt{7} - 2, -6).$$

1.7 Lo spazio \mathbb{R}^n

Fissato un intero $n \geq 0$, si definisce una **n -pla di numeri reali** come un elemento della forma

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

Le componenti si dicono:

- prima componente: x_1 ,
- seconda componente: x_2 ,
- ...
- n -esima componente: x_n .

Due n -ple

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

sono uguali se e solo se

$$\underline{x} = \underline{y} \iff x_i = y_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Si definisce

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

In altre parole, \mathbb{R}^n è il prodotto cartesiano di \mathbb{R} con sé stesso n volte.

Esempio 1.8. Nel caso $n = 3$ si ha

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Per esempio, sono elementi di \mathbb{R}^3 :

$$(0, 0, 0), \quad (1, 0, 0), \quad (-\sqrt{7}, 54, 21), \quad (\pi, e, -3).$$

Si osservi che

$$(1, 0, 0) \neq (0, 1, 0),$$

poiché le componenti non coincidono ordinatamente.

Su \mathbb{R}^n si definiscono le operazioni:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.9. La struttura algebrica $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

Il vettore nullo è

$$\underline{0} = (0, \dots, 0),$$

e l'opposto di (x_1, \dots, x_n) è

$$-(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Esercizio 1.10. Nello spazio \mathbb{R}^3 calcolare le componenti della combinazione lineare

$$\underline{x} = 2(1, 0, 0) - \sqrt{5}(0, -1, 0) + 8(0, 0, 1).$$

Svolgimento.

Applicando le definizioni:

$$\underline{x} = (2, 0, 0) + (0, \sqrt{5}, 0) + (0, 0, 8) = (2, \sqrt{5}, 8).$$

Pertanto:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \sqrt{5}, \quad x_3 = 8.$$

1.8 Lo spazio delle matrici $\mathcal{M}(m, n)$

Fissati $m, n \geq 1$, una **matrice** con m righe ed n colonne è una tabella rettangolare

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono uguali se e solo se

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \text{per ogni } i, j.$$

Si definisce l'insieme di tutte le matrici reali con m righe e n colonne

$$\mathcal{M}(m, n) := \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}.$$

Esempio 1.11. Nel caso $m = 2$ e $n = 3$ si ha

$$\mathcal{M}(2, 3) = \{A = (a_{ij}) \mid i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}.$$

Un elemento generico di $\mathcal{M}(2, 3)$ ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Per esempio,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \sqrt{7} & 5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2, 3).$$

Le operazioni sono definite componente per componente:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}),$$

$$aA := (a a_{ij}), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.12. La struttura $(\mathcal{M}(m, n), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

La matrice nulla è la matrice con tutte le componenti nulle. L'opposto di $A = (a_{ij})$ è $-A = (-a_{ij})$.

Esercizio 1.13. Nello spazio $\mathcal{M}(2, 3)$ calcolare le componenti della seguente combinazione lineare:

$$(a_{ij}) = A = -2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

Calcoliamo separatamente i tre termini.

$$-2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$-\sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sommiamo ora termine a termine:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 & 4 \\ 3 + 2\sqrt{2} & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osservazione 1.14. Si osservi che possiamo identificare \mathbb{R}^n con $\mathcal{M}(n, 1)$ e \mathbb{R}^m con $\mathcal{M}(1, m)$.

Infatti, un vettore

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

può essere visto come la matrice colonna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n, 1),$$

mentre un vettore

$$(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

può essere visto come la matrice riga

$$(y_1 \quad \dots \quad y_m) \in \mathcal{M}(1, m).$$

Le operazioni di somma e di prodotto per numero coincidono componente per componente.

1.9 Lo spazio dei polinomi

Fissiamo dei numeri reali

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad (n \geq 0).$$

Si definisce **polinomio** (nella variabile t) la funzione

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto p(t) := a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n.$$

Osservazione 1.15. Nel polinomio

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

il coefficiente a_0 si chiama **termine noto** del polinomio.

Se $a_n \neq 0$, allora si dice che p ha **grado** n e si scrive

$$\deg p = n.$$

In questo caso il numero a_n si chiama **coefficiente direttore** di p .

Osservazione 1.16. Il **polinomio nullo** è la funzione

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto 0,$$

cioè $p(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per convenzione, il polinomio nullo **non ha grado**.

Teorema (Principio di identità dei polinomi). (solo enunciato)

Siano

$$p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n, \quad q(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_kt^k.$$

Allora

$$p(t) = q(t) \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots$$

cioè i coefficienti dei due polinomi coincidono ordinatamente.

Indichiamo con $\mathbb{R}[t]$ l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti reali.

Su $\mathbb{R}[t]$ definiamo le seguenti operazioni.

Siano

$$p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n, \quad q(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_kt^k,$$

e sia $c \in \mathbb{R}$.**Somma di polinomi**

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \dots$$

Prodotto per uno scalare

$$cp(t) = ca_0 + ca_1t + \dots + ca_nt^n$$

Osservazione 1.17. Con queste operazioni la struttura algebrica

$$(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$$

è uno spazio vettoriale.

Il vettore nullo è il polinomio nullo $p(t) = 0$, mentre l'opposto del polinomio

$$p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$$

è

$$-p(t) = (-a_0) + (-a_1)t + \dots + (-a_n)t^n.$$

Esercizio 1.18. Calcolare i coefficienti del polinomio

$$p(t) = -3(1 + t^2) + 5(t - t^6) - (1 + t + t^3) + 4(5 - t - t^4) + 5t^6.$$

Svolgimento.

Sviluppamo e raccogliamo i termini simili:

$$\begin{aligned} p(t) &= (-3 - 3t^2) + (5t - 5t^6) + (-1 - t - t^3) + (20 - 4t - 4t^4) + 5t^6 \\ &= (-3 - 1 + 20) + (5t - t - 4t) + (-3t^2) + (-t^3) + (-4t^4) + (-5t^6 + 5t^6). \end{aligned}$$

Quindi

$$p(t) = 16 - 3t^2 - t^3 - 4t^4.$$

Pertanto i coefficienti sono:

$$a_0 = 16, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = -4, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = 0.$$

Poiché $a_4 \neq 0$, il grado del polinomio è

$$\deg p(t) = 4.$$

1.9.1 Lo spazio dei vettori geometrici

Tutti gli esempi di spazio vettoriale considerati finora sono esempi *numerici*, nel senso che i vettori sono stati descritti mediante numeri. Consideriamo ora un esempio diverso, in cui i vettori hanno natura *geometrica*.

Indichiamo con \mathcal{E} l'insieme dei punti dello spazio fisico.

Dati due punti $O, P \in \mathcal{E}$, denotiamo con

$$\overrightarrow{OP}$$

il segmento orientato con origine in O ed estremo in P .

Il punto O si dice anche **punto di applicazione** del segmento orientato \overrightarrow{OP} .

Il termine *orientato* si riferisce al fatto che, se si percorre il segmento \overrightarrow{OP} , ci si deve muovere da O verso P .

Osservazione 1.19. Talvolta il vettore \overrightarrow{OP} si denota anche con una lettera, per esempio \vec{u} .

Il segmento \overrightarrow{OO} , che si riduce al solo punto O , si chiama **segmento nullo**.



Figura 1: Un vettore geometrico applicato nel punto O .

Fissato un punto O di applicazione, denotiamo con V_O l'insieme costituito da tutti i vettori geometrici \overrightarrow{OP} , al variare di P nello spazio fisico \mathcal{E} :

$$V_O := \{\overrightarrow{OP} : P \in \mathcal{E}\}.$$

Su questo insieme vogliamo definire una addizione interna e una moltiplicazione per scalari.

Addizione di vettori geometrici. Siano \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} due vettori geometrici applicati nello stesso punto O .

Trasportiamo il vettore \overrightarrow{OQ} parallelamente a se stesso, in modo che il suo punto di applicazione coincida con l'estremo P del primo vettore. Quando il punto O è portato in P , l'estremo Q raggiunge un punto che indichiamo con R .

Definiamo allora

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} := \overrightarrow{OR}.$$

Se i vettori \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} non appartengono alla stessa retta, il vettore somma \overrightarrow{OR} coincide con la diagonale, applicata in O , del parallelogramma costruito sui lati \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} .

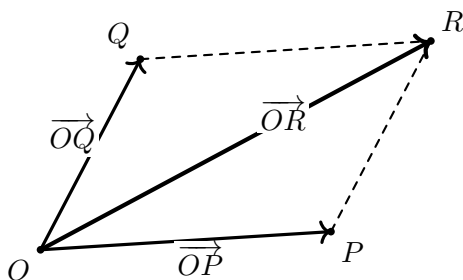


Figura 2: Somma di vettori geometrici: la diagonale del parallelogramma rappresenta $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$.

Prodotto per scalare. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $\vec{OP} \in V_O$.

Definiamo il vettore

$$a\vec{OP} := \vec{OS}$$

come quel segmento orientato applicato in O che:

- giace sulla stessa retta di \vec{OP} ;
- ha lunghezza pari a $|a| |\vec{OP}|$;
- ha lo stesso verso di \vec{OP} se $a > 0$;
- ha verso opposto a \vec{OP} se $a < 0$.

Se $a = 0$, si pone

$$0\vec{OP} = \vec{OO}.$$



Figura 3: Prodotto per scalare di un vettore geometrico.

Conclusione. Con le operazioni di somma e di prodotto per scalare appena definite, l'insieme V_O assume una struttura algebrica $(V_O, +, \cdot)$ che risulta essere uno spazio vettoriale.

L'insieme V_O con le operazioni precedenti si chiama **spazio dei vettori geometrici applicati in O** .

In questo spazio il vettore nullo è il segmento nullo

$$\vec{OO},$$

mentre l'opposto del vettore \vec{OP} è il vettore

$$-\vec{OP} = (-1)\vec{OP}.$$

Esercizio 1.20. Assegnati i vettori geometrici \vec{OP} ed \vec{OQ} come in figura, disegnare il vettore

$$\vec{OR} := 2\vec{OP} - 3\vec{OQ}.$$

Svolgimento.

Osserviamo che

$$-3\vec{OQ} = 3(-\vec{OQ}),$$

quindi il vettore $-3\vec{OQ}$ ha la stessa direzione di \vec{OQ} , verso opposto e modulo triplo.

Inoltre $2\vec{OP}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di \vec{OP} , con modulo doppio.

Per costruire il vettore

$$\vec{OR} = 2\vec{OP} - 3\vec{OQ},$$

si disegnano a partire da O i vettori $2\vec{OP}$ e $-3\vec{OQ}$, e poi si applica la regola del parallelogramma. La diagonale del parallelogramma così ottenuto rappresenta il vettore \vec{OR} .

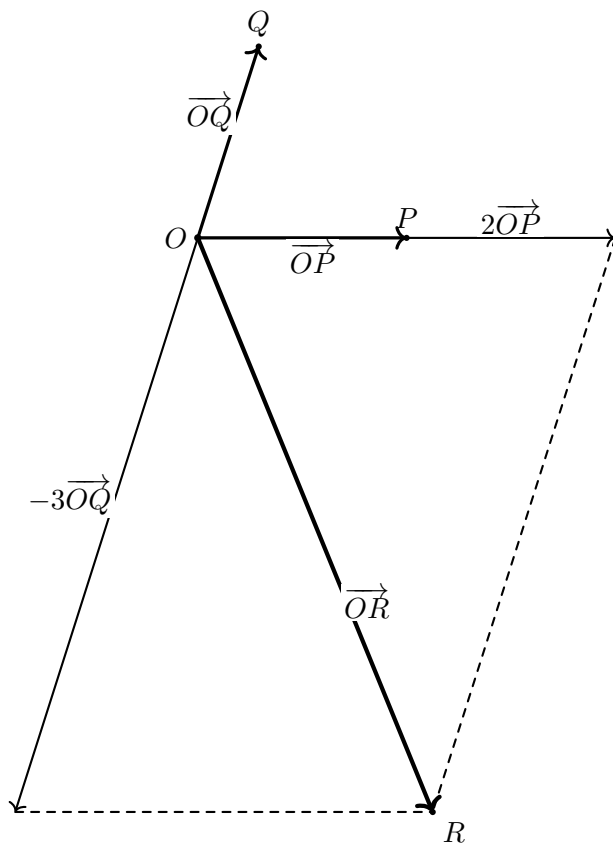


Figura 4: Costruzione del vettore $\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OQ}$.

1.10 Sottospazi

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e sia $W \subseteq V$ un suo sottoinsieme.

Il sottoinsieme W si dice **sottospazio vettoriale** di V se valgono le seguenti proprietà:

1. Il vettore nullo appartiene a W :

$$\underline{0} \in W$$

2. W è stabile rispetto all'addizione:

$$u, v \in W \implies u + v \in W$$

3. W è stabile rispetto alla moltiplicazione per scalari:

$$a \in \mathbb{R}, u \in W \implies au \in W$$

In tal caso W è detto **sottospazio vettoriale** di V .

Osservazione 1.21. Le condizioni precedenti esprimono che il sottoinsieme W è chiuso rispetto alle operazioni che definiscono la struttura di spazio vettoriale. In altre parole, combinando vettori di W mediante le operazioni di somma e moltiplicazione per scalari si ottengono ancora vettori appartenenti a W .

Criterio pratico per verificare un sottospazio

Spesso è utile un criterio equivalente che consente di verificare in modo più rapido se un sottoinsieme è un sottospazio.

Sia $W \subseteq V$.

Allora W è un sottospazio vettoriale di V se e solo se:

$$W \neq \emptyset$$

e

$$\forall u, v \in W, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad au + bv \in W.$$

Cioè ogni combinazione lineare di due vettori di W appartiene ancora a W .

Osservazione 1.22. La quantità

$$au + bv$$

si chiama **combinazione lineare** dei vettori u e v .

Dimostrazione

Dimostriamo l'equivalenza tra le due caratterizzazioni.

Prima implicazione Supponiamo che W sia un sottospazio vettoriale.

Per definizione vale:

$$0 \in W.$$

Quindi W non è vuoto.

Siano ora

$$u, v \in W, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dalla stabilità rispetto alla moltiplicazione per scalari (proprietà 3) segue che

$$au \in W \quad \text{e} \quad bv \in W.$$

Dalla stabilità rispetto alla somma (proprietà 2) segue allora

$$au + bv \in W.$$

Questo dimostra la prima implicazione.

Viceversa Supponiamo ora che

$$W \neq \emptyset$$

e che

$$au + bv \in W$$

per ogni $u, v \in W$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Mostriamo che W soddisfa le tre proprietà della definizione.

1. Il vettore nullo appartiene a W .

Poiché W non è vuoto, esiste almeno un vettore

$$u \in W.$$

Scegliendo $a = b = 0$ otteniamo

$$0u + 0u \in W.$$

Poiché $0u = 0$, segue

$$0 \in W.$$

2. Stabilità rispetto alla somma.

Siano $u, v \in W$.

Scegliendo $a = b = 1$ otteniamo

$$1u + 1v \in W.$$

Poiché $1u = u$ e $1v = v$, segue

$$u + v \in W.$$

3. Stabilità rispetto alla moltiplicazione per scalari.

Sia $u \in W$ e sia $a \in \mathbb{R}$.

Scegliendo $b = 0$ otteniamo

$$au + 0u \in W.$$

Poiché $0u = 0$, segue

$$au \in W.$$

Quindi W soddisfa tutte le condizioni della definizione di sottospazio vettoriale. □

Osservazione 1.23. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V .

Allora W , con le operazioni indotte da V , è esso stesso uno spazio vettoriale.

Dimostrazione. Poiché W è un sottospazio, per definizione è chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per scalari. Dunque, se $u, v \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, si ha

$$u + v \in W, \quad au \in W.$$

Quindi le operazioni di somma e di moltiplicazione per scalari, già definite in V , hanno senso anche su W e fanno di $(W, +, \cdot)$ una struttura algebrica.

Inoltre, poiché $W \subseteq V$ e le operazioni su W sono le restrizioni di quelle di V , tutte le proprietà formali della somma e del prodotto per scalari (commutatività, associatività, distributività, esistenza dello zero, esistenza dell'opposto, ecc.) valgono in W perché valgono in V .

Infine, essendo W un sottospazio, contiene il vettore nullo di V e, per ogni $u \in W$, contiene anche il suo opposto $-u$.

Pertanto W è uno spazio vettoriale. □

Esempi

1. Sottospazi banali.

Per ogni spazio vettoriale V , i sottoinsiemi

$$W = V \quad \text{e} \quad W = \{0\}$$

sono sottospazi vettoriali di V .

2. Sottospazi di \mathbb{R} .

Sia $V = \mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$ un sottospazio tale che $W \neq \{0\}$.

Allora esiste $u \in W$ con $u \neq 0$. Sia ora $v \in \mathbb{R}$ arbitrario. Si ha

$$v = \frac{v}{u}u.$$

Poiché $u \in W$ e W è stabile rispetto alla moltiplicazione per scalari, segue che $v \in W$.

Quindi

$$W = \mathbb{R}.$$

Pertanto gli unici sottospazi di \mathbb{R} sono

$$\{0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}.$$

3. Sia

$$V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}.$$

Allora

$$(0, 0) \notin W$$

infatti

$$0 + 0 \neq 1.$$

Poiché un sottospazio deve contenere il vettore nullo, segue che W **non** è un sottospazio.

4. Sia

$$V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}.$$

Verifichiamo le proprietà.

Vettore nullo

$$(0, 0) \in W$$

poiché

$$0 + 0 = 0.$$

Stabilità rispetto alla somma

Siano

$$u = (x_1, x_2) \in W, \quad v = (y_1, y_2) \in W.$$

Allora

$$x_1 + x_2 = 0, \quad y_1 + y_2 = 0.$$

Si ha

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0.$$

Quindi

$$u + v \in W.$$

Stabilità rispetto alla moltiplicazione per scalari

Sia $a \in \mathbb{R}$ e

$$u = (x_1, x_2) \in W.$$

Allora

$$au = (ax_1, ax_2)$$

e

$$ax_1 + ax_2 = a(x_1 + x_2) = 0.$$

Quindi

$$au \in W.$$

Pertanto W è un sottospazio di \mathbb{R}^2 .

5. Sia

$$V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 0\}.$$

Si ha

$$(0, 0) \in W$$

poiché

$$0 + 0 \geq 0.$$

Tuttavia W non è stabile rispetto alla moltiplicazione per scalari.

Infatti

$$u = (1, 0) \in W$$

ma per

$$a = -1$$

si ottiene

$$au = (-1, 0)$$

e

$$-1 + 0 < 0.$$

Quindi

$$(-1, 0) \notin W.$$

Pertanto W **non** è un sottospazio.

6. Sia

$$V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(0, 0, 0), (1, 2, 1)\}.$$

Questo insieme non è stabile rispetto alla moltiplicazione per scalari.

Infatti

$$3(1, 2, 1) = (3, 6, 3) \notin W.$$

Quindi W non è un sottospazio.

7. Sia

$$V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{a(1, 2, 1) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Verifichiamo le proprietà.

Vettore nullo

$$0(1, 2, 1) = (0, 0, 0) \in W.$$

Stabilità rispetto alla somma

Siano

$$u = a(1, 2, 1), \quad v = b(1, 2, 1).$$

Allora

$$u + v = (a + b)(1, 2, 1) \in W.$$

Stabilità rispetto alla moltiplicazione per scalari

Sia $c \in \mathbb{R}$.

$$cu = c(a(1, 2, 1)) = (ca)(1, 2, 1) \in W.$$

Quindi W è un sottospazio.

8. Sia

$$V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \subset V.$$

Questo insieme **non** è un sottospazio di \mathbb{R}^3 .

Infatti

$$(1, 0, 0) \in W, \quad (0, 1, 0) \in W$$

ma

$$(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin W.$$

Quindi W non è stabile rispetto alla somma e pertanto **non è un sottospazio**.

Consideriamo invece

$$W = \{a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Mostriamo che questo insieme è un sottospazio.

Vettore nullo

Scegliendo $a = b = 0$ si ottiene

$$0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \in W.$$

Stabilità rispetto alla somma

Siano

$$u = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0), \quad v = c(1, 0, 0) + d(0, 1, 0).$$

Allora

$$u + v = (a + c)(1, 0, 0) + (b + d)(0, 1, 0) \in W.$$

Stabilità rispetto alla moltiplicazione per scalari

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia

$$u = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) \in W.$$

Allora

$$\lambda u = (\lambda a)(1, 0, 0) + (\lambda b)(0, 1, 0) \in W.$$

Pertanto W è un sottospazio di \mathbb{R}^3 .

9. Sia

$$V = \mathbb{R}[t]$$

e sia fissato un intero

$$h \in \mathbb{N}, \quad h \geq 1.$$

Consideriamo il sottoinsieme

$$W = \mathbb{R}[t]_h := \{0\} \cup \{p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg p(t) = h\} \subset V.$$

Un polinomio di grado h ha la forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_h t^h, \quad a_h \neq 0.$$

Verifichiamo se W è un sottospazio.

Vettore nullo

Per definizione

$$0 \in W.$$

Stabilità rispetto alla moltiplicazione per scalari

Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $p(t) \in W$ con $\deg p(t) = h$.

Se $a = 0$ allora

$$ap(t) = 0 \in W.$$

Se invece $a \neq 0$, allora

$$ap(t) = aa_0 + aa_1 t + \cdots + aa_h t^h$$

e il coefficiente del termine di grado h è $aa_h \neq 0$.

Quindi

$$\deg(ap(t)) = h$$

e pertanto

$$ap(t) \in W.$$

Stabilità rispetto alla somma

Questa proprietà non vale.

Consideriamo ad esempio

$$p(t) = 1 + t + t^3, \quad q(t) = -3 + t^2 - t^3.$$

Entrambi hanno grado 3, quindi appartengono a W quando $h = 3$.

Tuttavia

$$p(t) + q(t) = -2 + t + t^2$$

che ha grado 2.

Quindi

$$p(t) + q(t) \notin W.$$

Pertanto W **non è un sottospazio**.

Consideriamo invece l'insieme

$$\mathbb{R}[t]_{\leq h} := \{p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg p(t) \leq h\}.$$

Questo insieme è un sottospazio di $\mathbb{R}[t]$ perché

- contiene il polinomio nullo;
- la somma di due polinomi di grado $\leq h$ ha ancora grado $\leq h$;
- il prodotto di un polinomio di grado $\leq h$ per uno scalare ha ancora grado $\leq h$ (oppure è nullo).

10. Sia

$$V = V_O$$

lo spazio dei vettori geometrici applicati nel punto O .

Sia

$$\ell$$

la retta passante per O e sia

$$\delta$$

il piano passante per O .

Definiamo i seguenti sottoinsiemi di V_O :

$$V_{O,\ell} := \{\vec{OP} : P \in \ell\}$$

$$V_{O,\delta} := \{\vec{OP} : P \in \delta\}.$$

Mostriamo che tali insiemi sono sottospazi di V_O .

Vettore nullo

Il vettore nullo è

$$\vec{0} = \vec{OO}.$$

Poiché $O \in \ell$ e $O \in \delta$, segue che

$$\vec{0} \in V_{O,\ell}, \quad \vec{0} \in V_{O,\delta}.$$

Stabilità rispetto alla somma

Siano

$$\vec{OP}, \vec{OQ} \in V_{O,\ell}.$$

Allora $P, Q \in \ell$ e quindi i due vettori hanno la stessa direzione della retta ℓ .

La loro somma

$$\vec{OP} + \vec{OQ}$$

è ancora un vettore con direzione ℓ , quindi appartiene ancora a $V_{O,\ell}$.

Analogamente, se

$$\vec{OP}, \vec{OQ} \in V_{O,\delta},$$

la loro somma appartiene ancora al piano δ .

Stabilità rispetto alla moltiplicazione per scalari

Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia

$$\vec{OP} \in V_{O,\ell}.$$

Il vettore

$$a\vec{OP}$$

ha la stessa direzione della retta ℓ (oppure la direzione opposta se $a < 0$), quindi appartiene ancora a $V_{O,\ell}$.

Lo stesso vale per il piano δ .

Quindi $V_{O,\ell}$ e $V_{O,\delta}$ sono sottospazi di V_O .

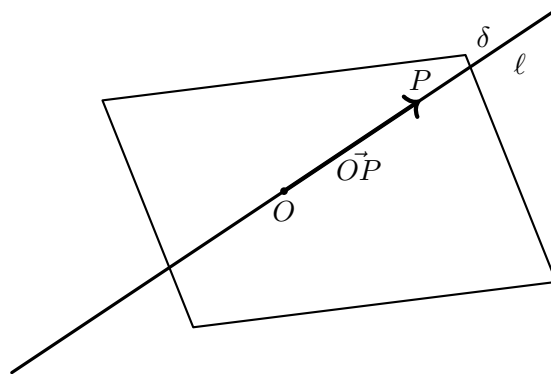


Figura 5: La retta ℓ e il piano δ passanti per O .

11. Sia ancora

$$V = V_O$$

e fissiamo ℓ, m due rette distinte passanti per O .

Consideriamo l'insieme

$$W = V_{O,\ell} \cup V_{O,m} \subset V_O.$$

Mostriamo che W non è un sottospazio.

Siano

$$\vec{OP} \in V_{O,\ell}, \quad \vec{OQ} \in V_{O,m}.$$

Poiché le due rette sono distinte, i vettori \vec{OP} e \vec{OQ} non sono paralleli.

La loro somma

$$\vec{OP} + \vec{OQ}$$

non appartiene né alla retta ℓ né alla retta m .

Quindi

$$\vec{OP} + \vec{OQ} \notin W.$$

Pertanto W non è stabile rispetto alla somma e quindi non è un sottospazio.

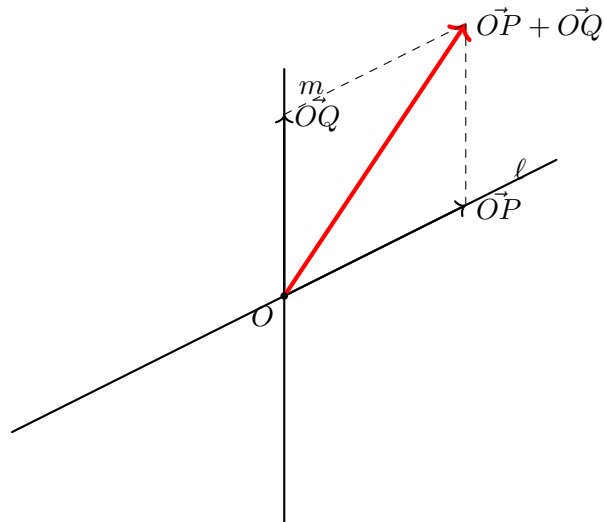


Figura 6: Unione di due rette passanti per O non stabile rispetto alla somma.

1.11 Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale e siano

$$u_1, \dots, u_h \in V.$$

La sequenza

$$(u_1, \dots, u_h)$$

si dice **sistema di vettori** di V .

Siano

$$a_1, \dots, a_h \in \mathbb{R}.$$

Il vettore

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_hu_h$$

si dice **combinazione lineare** dei vettori u_1, \dots, u_h con pesi a_1, \dots, a_h .

In tal caso si dice che u **dipende linearmente** dai vettori u_1, \dots, u_h .

Esercizio 1.24. Verificare che

$$(4, 13) \in \mathbb{R}^2$$

è combinazione lineare dei vettori

$$(1, 3), \quad (1, 4).$$

Svolgimento.

Cerchiamo x, y tali che

$$(4, 13) = x(1, 3) + y(1, 4).$$

Calcoliamo il membro destro:

$$x(1, 3) + y(1, 4) = (x + y, 3x + 4y).$$

Quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

Da cui si ottiene

$$x = 3, \quad y = 1.$$

Pertanto

$$(4, 13) = 3(1, 3) + 1(1, 4).$$

Esercizio 1.25. Dire se il vettore

$$(0, 1, 1)$$

dipende linearmente dai vettori

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0).$$

Svolgimento.

Cerchiamo x, y tali che

$$(0, 1, 1) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0).$$

Il membro destro vale

$$(x, y, 0).$$

Quindi dovremmo avere

$$(x, y, 0) = (0, 1, 1).$$

Ma questo è impossibile, perché la terza componente darebbe

$$0 = 1.$$

Quindi il vettore $(0, 1, 1)$ **non dipende linearmente** dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

1.12 Sottospazio generato

Fissiamo un sottoinsieme

$$S \subset V.$$

L'insieme $\text{Span}(S)$ è dato da tutte le combinazioni lineari dei vettori appartenenti a S . Più precisamente,

$$u \in \text{Span}(S) \iff \exists u_1, \dots, u_h \in S, \exists a_1, \dots, a_h \in \mathbb{R}$$

tali che

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_h u_h.$$

Lo spazio $\text{Span}(S)$ si chiama **sottospazio generato da S** .

Osservazione 1.26. Se V è già uno spazio vettoriale, allora

$$\text{Span}(V) = V.$$

Infatti ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare di vettori di V stesso. Più precisamente, fissato $u \in V$ si ha

$$u = 1 \cdot u,$$

che è una combinazione lineare di vettori appartenenti a V .

Osservazione 1.27. Per definizione, $\text{Span}(S)$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene l'insieme S .

1.13 Esercizi dal file del professore

Esercizio 1.28 (Tutoraggio – file del professore). Sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali si consideri l'operazione interna \oplus definita da

$$x \oplus y := x + 2y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- i) Dire se l'operazione \oplus ammette un elemento neutro.
- ii) Dire se l'operazione \oplus è associativa.
- iii) Dire se l'operazione \oplus è commutativa.
- iv) Considerata la struttura algebrica $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$, dove \cdot è il prodotto usuale per scalari, verificare che non è uno spazio vettoriale.

Svolgimento.**i) Elemento neutro**

Cerchiamo un elemento $e \in \mathbb{R}$ tale che

$$e \oplus x = x \oplus e = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo separatamente le due condizioni.

Da

$$e \oplus x = e + 2x = x$$

si ottiene

$$e = -x,$$

che non può valere per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Da

$$x \oplus e = x + 2e = x$$

si ottiene invece

$$2e = 0 \quad \implies \quad e = 0.$$

Le due condizioni non sono compatibili. Dunque l'operazione \oplus **non ammette elemento neutro**.

ii) Associatività

Calcoliamo:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + 2y) \oplus z = (x + 2y) + 2z = x + 2y + 2z.$$

Invece

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + 2z) = x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z.$$

Poiché in generale

$$x + 2y + 2z \neq x + 2y + 4z,$$

l'operazione \oplus **non è associativa**.

iii) Commutatività

Si ha

$$x \oplus y = x + 2y, \quad y \oplus x = y + 2x.$$

In generale questi due numeri non coincidono. Ad esempio, per $x = 1$ e $y = 0$:

$$1 \oplus 0 = 1, \quad 0 \oplus 1 = 2.$$

Quindi \oplus **non è commutativa**.

iv) Verifica che $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ non è uno spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale deve soddisfare gli assiomi dell'addizione interna. In particolare, l'operazione interna deve avere un elemento neutro ed essere associativa.

Ma ai punti precedenti abbiamo mostrato che:

\oplus non ha elemento neutro

e inoltre

\oplus non è associativa.

Pertanto la struttura

$$(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$$

non è uno spazio vettoriale.

Esercizio 1.29 (Tutoraggio 1 – file del professore). Nello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ siano dati i vettori

$$u_1 = (1, 0, 1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0, 1), \quad u_3 = (2, 3, 2, 4).$$

i) Calcolare il vettore

$$u := 3u_1 - 2u_2 + u_3.$$

ii) Stabilire se esistono scalari $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0.$$

iii) Posto

$$v = (2, 3, 2, 3),$$

stabilire se esistono scalari $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3v = 0.$$

iv) In caso di risposta affermativa al punto precedente, prendendo una terna non nulla con $a_1 = 2$, scrivere u_1 come combinazione lineare di u_2 e v .

Svolgimento.

i) Calcolo del vettore u

Si ha

$$3u_1 = (3, 0, 3, 0), \quad -2u_2 = (0, -2, 0, -2), \quad u_3 = (2, 3, 2, 4).$$

Quindi

$$u = 3u_1 - 2u_2 + u_3$$

vale

$$u = (3, 0, 3, 0) + (0, -2, 0, -2) + (2, 3, 2, 4).$$

Sommiamo componente per componente:

$$u = (5, 1, 5, 2).$$

ii) Esistenza di una relazione lineare tra u_1, u_2, u_3

Cerchiamo soluzioni del sistema

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0.$$

Scrivendo per componenti:

$$a_1(1, 0, 1, 0) + a_2(0, 1, 0, 1) + a_3(2, 3, 2, 4) = (0, 0, 0, 0).$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases}$$

Le prime e terze equazioni coincidono. Confrontando la seconda e la quarta:

$$a_2 + 3a_3 = 0, \quad a_2 + 4a_3 = 0.$$

Sottraendo, si ottiene

$$a_3 = 0.$$

Quindi anche

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

L'unica soluzione è quella banale. Dunque **non esistono** scalari non tutti nulli tali che

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0.$$

iii) Relazione lineare tra u_1, u_2, v

Consideriamo ora

$$v = (2, 3, 2, 3).$$

Cerchiamo soluzioni di

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3v = 0.$$

Scrivendo per componenti:

$$a_1(1, 0, 1, 0) + a_2(0, 1, 0, 1) + a_3(2, 3, 2, 3) = (0, 0, 0, 0).$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette infinite soluzioni. Ponendo

$$a_3 = t,$$

si ha

$$a_1 = -2t, \quad a_2 = -3t.$$

Quindi **esistono** soluzioni non banali. Ad esempio, scegliendo $t = 1$:

$$a_1 = -2, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = 1.$$

iv) Scrivere u_1 come combinazione lineare di u_2 e v con $a_1 = 2$

Vogliamo una terna non nulla che soddisfi

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3v = 0$$

e tale che

$$a_1 = 2.$$

Dalla formula generale

$$a_1 = -2t$$

otteniamo

$$-2t = 2 \quad \implies \quad t = -1.$$

Quindi

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -1.$$

La relazione lineare diventa

$$2u_1 + 3u_2 - v = 0.$$

Da cui

$$2u_1 = v - 3u_2$$

e quindi

$$u_1 = \frac{1}{2}v - \frac{3}{2}u_2.$$

Questa è l'espressione richiesta di u_1 come combinazione lineare di u_2 e v .

1.14 Sottospazio vettoriale generato da un insieme

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $S \subseteq V$.

Si definisce **sottospazio vettoriale generato da S** l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite che si possono formare con vettori di S .

In simboli:

$$\text{Span}(S) = \{\underline{u} \in V \mid \exists \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n \in S, \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \underline{u} = a_1 \underline{s}_1 + a_2 \underline{s}_2 + \dots + a_n \underline{s}_n\}.$$

Si usa anche la notazione

$$\text{Span}(S) = \langle S \rangle.$$

Osservazione. Il significato di $\text{Span}(S)$ è il seguente: esso contiene tutti e soli i vettori che si possono ottenere come combinazioni lineari di vettori appartenenti a S .

1.14.1 Esempi

Esempio 1. Se $S = \emptyset$, allora

$$\text{Span}(\emptyset) := \{\underline{0}\}.$$

Esempio 2. Se $S = \{\underline{s}\}$, allora

$$\text{Span}(S) = \{a\underline{s} : a \in \mathbb{R}\}.$$

Infatti ogni combinazione lineare di \underline{s} ha la forma

$$a_1 \underline{s} + a_2 \underline{s} + \dots + a_n \underline{s} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \underline{s}.$$

Quindi ogni vettore di $\text{Span}(S)$ è un multiplo di \underline{s} .

Osservazione. In particolare,

$$\underline{0}, \quad \underline{s} = 1 \cdot \underline{s}, \quad \sqrt{7} \underline{s}, \quad \dots \in \text{Span}(S).$$

Esempio 3. Sia

$$S = \{(1, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Allora

$$\text{Span}(S) = \{a(1, 5) : a \in \mathbb{R}\} = \{(a, 5a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Equivalentemente,

$$\text{Span}(S) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 5x_1 - x_2 = 0\}.$$

Esempio 4. Se $S = \{\underline{u}, \underline{v}\}$, allora

$$\text{Span}(S) = \{a\underline{u} + b\underline{v} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Osservazione. In particolare,

$$\underline{0}, \quad \underline{u}, \quad \underline{v} \in \text{Span}(S).$$

Esempio 5. Sia

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Allora

$$\text{Span}(S) = \{a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Equivalentemente,

$$\text{Span}(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}.$$

1.15 Proprietà del sottospazio generato

Sia $S \subseteq V$. Allora valgono le seguenti proprietà:

1)

$$\text{Span}(\emptyset) = \{\underline{0}\}.$$

2)

$$S \subseteq \text{Span}(S).$$

3) $\text{Span}(S)$ è un sottospazio vettoriale di V .

4) Se $S \subseteq T$, allora

$$\text{Span}(S) \subseteq \text{Span}(T).$$

Questa proprietà si chiama **monotonìa**.

5) S è un sottospazio vettoriale di V se e solo se

$$S = \text{Span}(S).$$

6) Se W è un sottospazio vettoriale di V e $S \subseteq W$, allora

$$\text{Span}(S) \subseteq W.$$

Questa proprietà si chiama **proprietà di giustificazione**.

Inoltre,

$$\text{Span}(S) = \bigcap_{\substack{W \text{ sottospazio di } V \\ S \subseteq W}} W.$$

1.15.1 Dimostrazione delle proprietà

Dimostrazione della proprietà 1.

La proprietà

$$\text{Span}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$$

vale per definizione di sottospazio generato nel caso dell'insieme vuoto.

Dimostrazione della proprietà 2.

Per ogni $\underline{s} \in S$ si ha

$$\underline{s} = 1 \cdot \underline{s},$$

quindi \underline{s} è una combinazione lineare di vettori di S .

Pertanto

$$\underline{s} \in \text{Span}(S).$$

Essendo \underline{s} arbitrario, segue che

$$S \subseteq \text{Span}(S).$$

Dimostrazione della proprietà 3.

Vogliamo provare che $\text{Span}(S)$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dobbiamo quindi mostrare che:

- $\underline{0} \in \text{Span}(S)$;
- se $\underline{u}, \underline{v} \in \text{Span}(S)$, allora
- se $a \in \mathbb{R}$ e $\underline{u} \in \text{Span}(S)$, allora

$$\underline{u} + \underline{v} \in \text{Span}(S);$$

$$a\underline{u} \in \text{Span}(S).$$

Siano dunque

$$\underline{u} = a_1\underline{s}_1 + a_2\underline{s}_2 + \cdots + a_h\underline{s}_h, \quad \underline{v} = a'_1\underline{s}'_1 + a'_2\underline{s}'_2 + \cdots + a'_k\underline{s}'_k,$$

con $\underline{s}_i, \underline{s}'_j \in S$.

Allora

$$\underline{u} + \underline{v} = a_1\underline{s}_1 + \cdots + a_h\underline{s}_h + a'_1\underline{s}'_1 + \cdots + a'_k\underline{s}'_k \in \text{Span}(S).$$

Inoltre, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$a\underline{u} = aa_1\underline{s}_1 + aa_2\underline{s}_2 + \cdots + aa_h\underline{s}_h \in \text{Span}(S).$$

Quindi $\text{Span}(S)$ è stabile rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari, dunque è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione della proprietà 4 (monotonìa).

Supponiamo

$$S \subseteq T.$$

Sia

$$\underline{u} = a_1\underline{s}_1 + a_2\underline{s}_2 + \cdots + a_h\underline{s}_h \in \text{Span}(S).$$

Poiché ciascun \underline{s}_i appartiene a S e $S \subseteq T$, segue che ciascun \underline{s}_i appartiene anche a T .

Quindi la stessa combinazione lineare mostra che

$$\underline{u} \in \text{Span}(T).$$

Pertanto

$$\text{Span}(S) \subseteq \text{Span}(T).$$

Dimostrazione della proprietà 5.

Vale:

$$S \text{ è un sottospazio vettoriale di } V \iff S = \text{Span}(S).$$

Dimostrazione.

$$(\Leftarrow)$$

è ovvia.

(\Rightarrow)

Supponiamo che S sia un sottospazio vettoriale di V .

Per la proprietà 2 sappiamo già che

$$S \subseteq \text{Span}(S).$$

Resta da provare che

$$\text{Span}(S) \subseteq S.$$

Sia dunque

$$\underline{u} = a_1 \underline{s}_1 + a_2 \underline{s}_2 + \cdots + a_h \underline{s}_h, \quad a_i \in \mathbb{R}, \underline{s}_i \in S.$$

Poiché S è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, si ha

$$a_i \underline{s}_i \in S \quad \text{per ogni } i.$$

Essendo poi S stabile rispetto alla somma interna, segue che anche

$$a_1 \underline{s}_1 + \cdots + a_h \underline{s}_h \in S.$$

Quindi

$$\underline{u} \in S.$$

Pertanto

$$\text{Span}(S) \subseteq S.$$

In conclusione,

$$S = \text{Span}(S).$$

Dimostrazione della proprietà 6 (giustificazione).

Sia W un sottospazio vettoriale di V e supponiamo che

$$S \subseteq W.$$

Allora, per monotonia,

$$\text{Span}(S) \subseteq \text{Span}(W).$$

Ma, essendo W un sottospazio vettoriale,

$$W = \text{Span}(W).$$

Quindi

$$\text{Span}(S) \subseteq W.$$

Osservazione. Dalla proprietà di giustificazione segue che

$$\text{Span}(S) = \bigcap_{\substack{W \text{ sottospazio di } V \\ S \subseteq W}} W.$$

Sostanzialmente:

$$\text{Span}(S) \subseteq \bigcap_{\substack{W \text{ sottospazio di } V \\ S \subseteq W}} W \subseteq \text{Span}(S).$$

1.16 Esercizio

Siano

$$S = \{(1, 2, 3), (-1, 4, 2)\}, \quad T = \{(0, 6, 5), (2, -2, 1)\}.$$

Dire se

$$\text{Span}(S) = \text{Span}(T).$$

Svolgimento.

Vediamo se

$$T \subseteq \text{Span}(S) \implies \text{Span}(T) \subseteq \text{Span}(S).$$

Poi andiamo a vedere se

$$S \subseteq \text{Span}(T) \implies \text{Span}(S) \subseteq \text{Span}(T).$$

Se entrambe le inclusioni valgono, allora

$$\text{Span}(S) = \text{Span}(T).$$

Cerchiamo prima di scrivere i vettori di T come combinazioni lineari dei vettori di S .

$$(0, 6, 5) = a(1, 2, 3) + b(-1, 4, 2)$$

equivale a

$$(0, 6, 5) = (a - b, 2a + 4b, 3a + 2b).$$

Il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + 4b = 6 \\ 3a + 2b = 5 \end{cases}$$

e si ottiene

$$a = 1, \quad b = 1.$$

Quindi

$$(0, 6, 5) \in \text{Span}(S).$$

Analogamente,

$$(2, -2, 1) = a(1, 2, 3) + b(-1, 4, 2)$$

equivale a

$$(2, -2, 1) = (a - b, 2a + 4b, 3a + 2b),$$

cioè al sistema

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ 2a + 4b = -2 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$a = 1, \quad b = -1.$$

Quindi

$$(2, -2, 1) \in \text{Span}(S).$$

Pertanto

$$T \subseteq \text{Span}(S)$$

e, per giustificazione,

$$\text{Span}(T) \subseteq \text{Span}(S).$$

Ora verifichiamo l'altra inclusione.

$$(1, 2, 3) = a(0, 6, 5) + b(2, -2, 1) \iff (1, 2, 3) = (2b, 6a - 2b, 5a + b).$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2b = 1 \\ 6a - 2b = 2 \\ 5a + b = 3 \end{cases}$$

da cui

$$b = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$(1, 2, 3) \in \text{Span}(T).$$

Con lo stesso procedimento si verifica che anche

$$(-1, 4, 2) \in \text{Span}(T).$$

Infatti

$$(-1, 4, 2) = a(0, 6, 5) + b(2, -2, 1) \iff (-1, 4, 2) = (2b, 6a - 2b, 5a + b),$$

e il sistema

$$\begin{cases} 2b = -1 \\ 6a - 2b = 4 \\ 5a + b = 2 \end{cases}$$

fornisce

$$b = -\frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2}.$$

Dunque

$$(-1, 4, 2) \in \text{Span}(T).$$

Allora

$$S \subseteq \text{Span}(T),$$

e per giustificazione

$$\text{Span}(S) \subseteq \text{Span}(T).$$

Concludiamo quindi che

$$\text{Span}(S) = \text{Span}(T).$$

1.17 Sistemi di generatori e spazi vettoriali finitamente generabili

Sia V uno spazio vettoriale e sia $S \subseteq V$.

Se

$$V = \text{Span}(S),$$

allora S si dice un **sistema di generatori** di V .

Lo spazio vettoriale V si dice **finitamente generabile** se esiste un insieme finito $S \subseteq V$ tale che

$$V = \text{Span}(S).$$

Osservazione. Noi tratteremo soltanto i casi finiti nell'algebra lineare; i casi infiniti non li tratteremo.

1.17.1 Esempi

1). Lo spazio nullo

$$V = \{0\}$$

è finitamente generabile, poiché

$$V = \{0\} = \text{Span}(\emptyset).$$

2). Poiché

$$V = \text{Span}(V),$$

allora V è sempre un sistema di generatori per sé stesso. In generale, questo sistema di generatori può essere infinito.

3). Supponiamo che

$$V = \mathbb{R}.$$

Per ogni vettore $u = x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ e per ogni $v \in \mathbb{R}$, si ha

$$v = \frac{v}{x} x.$$

Quindi

$$\mathbb{R} = \text{Span}(\{u\}).$$

In particolare,

$$\mathbb{R} = \text{Span}(\{1\}).$$

Dunque \mathbb{R} è finitamente generabile, e ogni vettore non nullo genera tutto \mathbb{R} .

4). Sia

$$\underline{u} = (x_1, x_2)$$

un qualunque vettore di \mathbb{R}^2 . Allora

$$\underline{u} = (x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1).$$

Ciò significa che ogni vettore di \mathbb{R}^2 è combinazione lineare dei vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$, con pesi dati proprio dalle componenti di \underline{u} .

Quindi

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span}(\{(1, 0), (0, 1)\}).$$

I vettori

$$\underline{e}_1 := (1, 0), \quad \underline{e}_2 := (0, 1)$$

si chiamano **vettori canonici** di \mathbb{R}^2 .

Esercizio. Verifichiamo che

$$\text{Span}((1, 0), (0, 1), (1, 1)) = \text{Span}((1, 3), (1, 4)) = \mathbb{R}^2.$$

La prima uguaglianza è immediata, perché i vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ generano già tutto \mathbb{R}^2 , e quindi l'aggiunta del vettore $(1, 1)$ non cambia il sottospazio generato:

$$\text{Span}((1, 0), (0, 1), (1, 1)) = \mathbb{R}^2.$$

Verifichiamo ora che anche

$$\text{Span}((1, 3), (1, 4)) = \mathbb{R}^2.$$

Dato un vettore arbitrario

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

cerchiamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$(x_1, x_2) = a(1, 3) + b(1, 4).$$

Sviluppando il secondo membro otteniamo

$$(x_1, x_2) = (a + b, 3a + 4b).$$

Quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b = x_1 \\ 3a + 4b = x_2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$a = x_1 - b.$$

Sostituendo nella seconda:

$$3(x_1 - b) + 4b = x_2$$

cioè

$$3x_1 + b = x_2,$$

da cui

$$b = x_2 - 3x_1.$$

Allora

$$a = x_1 - b = x_1 - (x_2 - 3x_1) = 4x_1 - x_2.$$

Abbiamo quindi trovato

$$a = 4x_1 - x_2, \quad b = x_2 - 3x_1,$$

e dunque ogni vettore $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si scrive come combinazione lineare di $(1, 3)$ e $(1, 4)$.

Pertanto

$$\text{Span}((1, 3), (1, 4)) = \mathbb{R}^2.$$

In conclusione,

$$\text{Span}((1, 0), (0, 1), (1, 1)) = \text{Span}((1, 3), (1, 4)) = \mathbb{R}^2.$$

5). In \mathbb{R}^3 i vettori canonici sono

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \underline{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \underline{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Ogni vettore

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

si scrive come

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3.$$

Quindi

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3).$$

6). Più in generale, in \mathbb{R}^n i vettori canonici sono

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \underline{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \underline{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Più precisamente, il vettore canonico \underline{e}_i , con $i = 1, \dots, n$, è il vettore che ha tutte le componenti nulle tranne quella di posto i , che è uguale a 1.

Ogni vettore

$$\underline{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

si scrive come

$$\underline{u} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + \dots + x_n\underline{e}_n.$$

Quindi

$$\mathbb{R}^n = \text{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n).$$

Dunque \mathbb{R}^n è finitamente generabile dal sistema formato dai vettori canonici.

7). Consideriamo lo spazio delle matrici $\mathcal{M}(2, 2)$.

Le matrici canoniche sono

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ogni matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

si scrive come

$$A = a_{1,1}E_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + a_{2,1}E_{2,1} + a_{2,2}E_{2,2}.$$

Quindi

$$\mathcal{M}(2, 2) = \text{Span}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}).$$

Osservazione. Le matrici $E_{i,j}$ si chiamano **matrici canoniche**.

8). Un esempio di spazio che non è finitamente generabile è lo spazio dei polinomi

$$\mathbb{R}[t].$$

Infatti, siano

$$p_1(t), \dots, p_h(t)$$

un numero finito qualsiasi di polinomi, e sia

$$m = \max\{\deg p_1, \dots, \deg p_h\}.$$

Allora il polinomio

$$t^{m+1}$$

non può essere combinazione lineare di

$$p_1(t), \dots, p_h(t),$$

perché una combinazione lineare non può aumentare il massimo grado dei polinomi considerati.

Quindi, per ogni insieme finito di polinomi,

$$\mathbb{R}[t] \neq \text{Span}(\{p_1(t), \dots, p_h(t)\}),$$

e dunque $\mathbb{R}[t]$ non è finitamente generabile.

Osservazione. Per ogni $h \geq 1$, il sottospazio troncato

$$\mathbb{R}[t]_{\leq h}$$

è invece finitamente generabile.

Infatti ogni polinomio $p(t)$ di grado al più h si scrive nella forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_h t^h,$$

eventualmente con $a_h = 0$.

Quindi

$$\mathbb{R}[t]_{\leq h} = \text{Span}(\{1, t, t^2, \dots, t^h\}).$$

1.18 Gli spazi geometrici sono finitamente generabili

Sia ℓ una retta dello spazio, passante per il punto di applicazione O . Allora

$$\mathcal{V}_{O,\ell} = \{\overrightarrow{OP} : P \in \ell\}.$$

Tale insieme è un sottospazio vettoriale di \mathcal{V}_O .

Osservazione. Si ha

$$\mathcal{V}_{O,\ell} = \text{Span}(\overrightarrow{OE}).$$

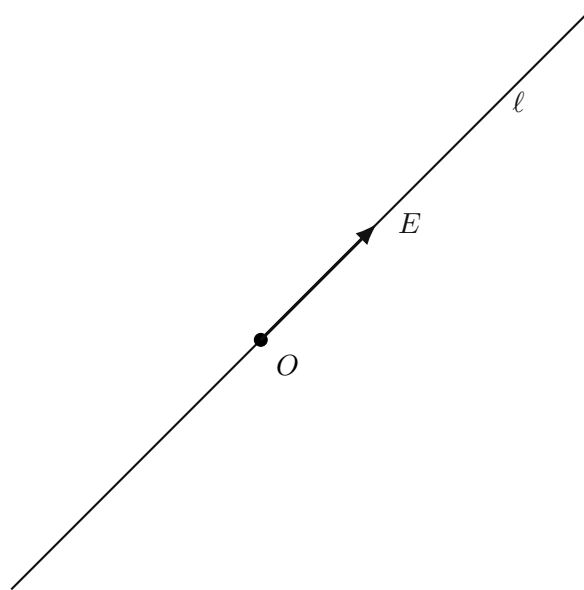
Infatti, se

$$\overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_{O,\ell},$$

allora

$$\overrightarrow{OP} = x \overrightarrow{OE},$$

dove x è il rapporto tra la lunghezza di \overrightarrow{OP} e quella di \overrightarrow{OE} , preso con il segno opportuno.



Osservazione. In questo caso non ci sono vettori canonici, perché lo spazio

$$\mathcal{V}_{O,\ell}$$

è generato da un solo vettore direttore della retta, ma tale vettore non è determinato in modo naturale in modo unico.

Infatti, scelto un punto $E \in \ell$ con $E \neq O$, si ha

$$\mathcal{V}_{O,\ell} = \text{Span}(\vec{OE}),$$

ma anche qualunque altro vettore non nullo della stessa retta genera lo stesso spazio.

Quindi non esiste una scelta privilegiata, o *canonica*, del generatore.

Fissiamo ora un piano ρ e supponiamo che

$$O \in \rho.$$

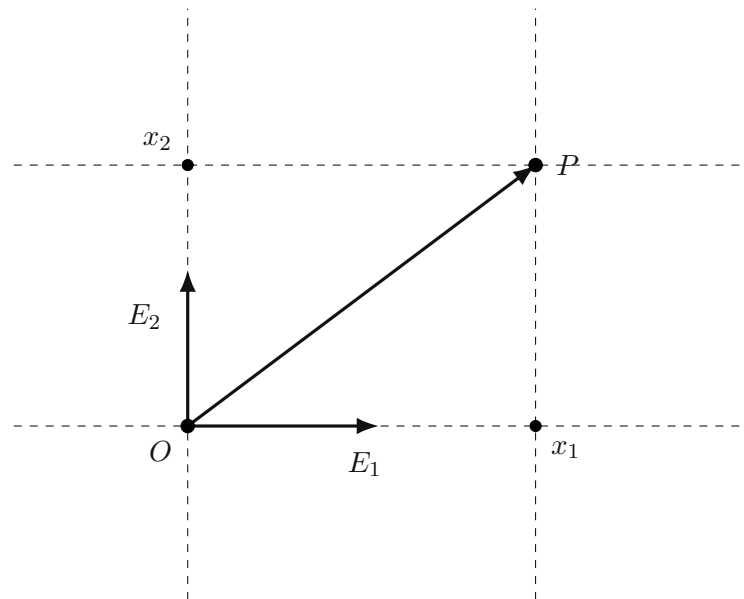
Poniamo

$$\mathcal{V}_{O,\rho} = \{ \vec{OP} : P \in \rho \}.$$

Fissiamo due punti

$$E_1, E_2 \in \rho$$

tali che O, E_1, E_2 non siano allineati.



Allora

$$\mathcal{V}_{O,\rho} = \text{Span}(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}).$$

Infatti, sia

$$\overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_{O,\rho}$$

un vettore qualsiasi. Dal grafico si ottiene

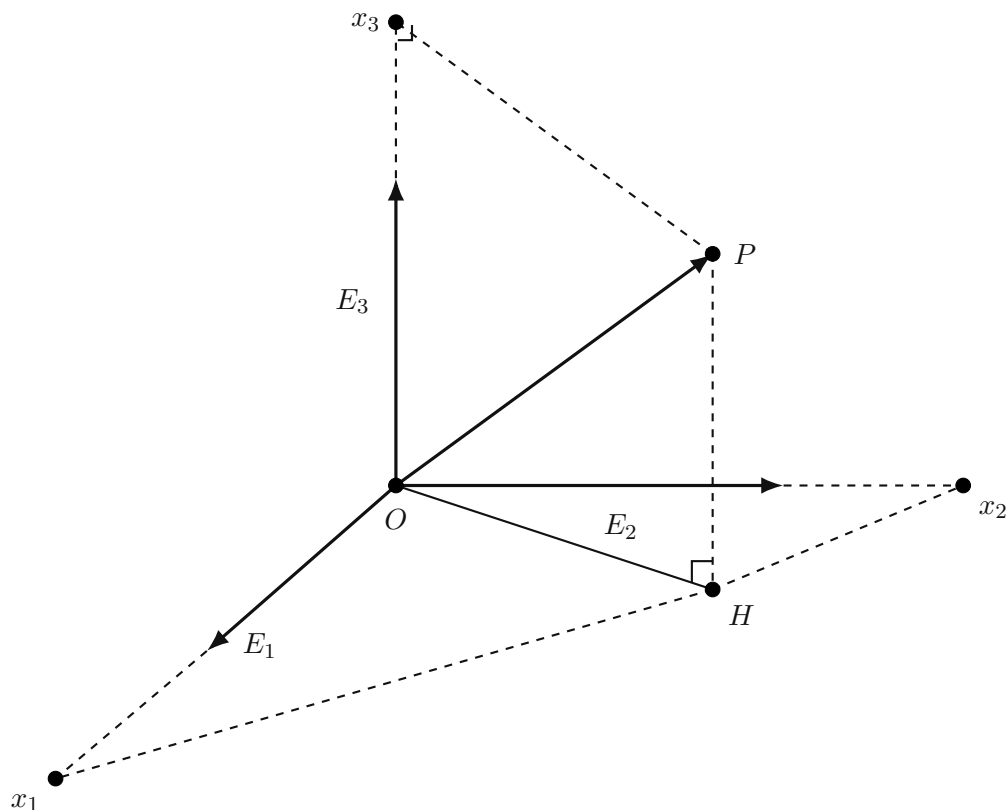
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} = x_1 \overrightarrow{OE_1} + x_2 \overrightarrow{OE_2}.$$

Andiamo ora a provare graficamente che \mathcal{V}_O è finitamente generabile.

Fissiamo tre punti

$$E_1, E_2, E_3$$

tali che non siano complanari.



Allora

$$\mathcal{V}_O = \text{Span}(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}).$$

Infatti, sia

$$\overrightarrow{OP} \in \mathcal{V}_O.$$

Dal grafico si ricava

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OX_3} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} + \overrightarrow{OX_3} = x_1 \overrightarrow{OE_1} + x_2 \overrightarrow{OE_2} + x_3 \overrightarrow{OE_3}.$$

Notazione.

$$\underline{i} = \overrightarrow{OE_1}, \quad \underline{j} = \overrightarrow{OE_2}, \quad \underline{k} = \overrightarrow{OE_3}.$$

Sia

$$W = \{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \}.$$

Provare che W è un sottospazio di \mathbb{R}^3 , finitamente generabile, e trovare un sistema finito di generatori per W .

Osservazione. In W , per esempio, appartengono i vettori

$$(0, 0, 0), \quad (3, 1, 0), \quad \left(0, 1, \frac{3}{5}\right), \quad \dots$$

mentre

$$(1, 1, 1) \notin W.$$

Svolgimento.

Sia

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Allora

$$\underline{x} \in W \iff x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \iff x_1 = 3x_2 - 5x_3.$$

Quindi

$$\underline{x} \in W \iff \exists x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ tali che } \underline{x} = (3x_2 - 5x_3, x_2, x_3).$$

Ora

$$(3x_2 - 5x_3, x_2, x_3) = (3x_2, x_2, 0) + (-5x_3, 0, x_3) = x_2(3, 1, 0) + x_3(-5, 0, 1).$$

Dunque

$$\underline{x} \in W \iff \exists x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ tali che } \underline{x} = x_2(3, 1, 0) + x_3(-5, 0, 1).$$

Ciò equivale a dire che

$$W = \text{Span}((3, 1, 0), (-5, 0, 1)).$$

Quindi W è un sottospazio di \mathbb{R}^3 ed è finitamente generabile.**1.19 Sistemi di vettori linearmente indipendenti****Osservazione.** Si consideri

$$W = \text{Span}((1, 1, 2), (0, 2, 3), (1, 3, 5)).$$

Poiché

$$(1, 3, 5) = (1, 1, 2) + (0, 2, 3),$$

se $\underline{w} \in W$, allora

$$\underline{w} = a(1, 1, 2) + b(0, 2, 3) + c(1, 3, 5)$$

si può riscrivere come

$$\underline{w} = a(1, 1, 2) + b(0, 2, 3) + c((1, 1, 2) + (0, 2, 3))$$

e quindi

$$\underline{w} = (a + c)(1, 1, 2) + (b + c)(0, 2, 3).$$

Pertanto

$$W = \text{Span}((1, 1, 2), (0, 2, 3), (1, 3, 5)) = \text{Span}((1, 1, 2), (0, 2, 3)).$$

Per studiare in generale questo esempio, occorrono alcune definizioni preliminari.

Siano

$$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h \in V, \quad a_1, a_2, \dots, a_h \in \mathbb{R}.$$

Se

$$a_1 \underline{u}_1 + a_2 \underline{u}_2 + \dots + a_h \underline{u}_h = \underline{0},$$

allora la h -pla

$$(a_1, a_2, \dots, a_h) \in \mathbb{R}^h$$

si dice una **relazione** per i vettori

$$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h.$$

Se

$$a_1 = a_2 = \dots = a_h = 0,$$

allora la relazione

$$(0, 0, \dots, 0)$$

si dice **banale**.

Se l'unica relazione per

$$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h$$

è quella banale, allora si dice che il sistema

$$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h$$

è **linearmente indipendente**, oppure **libero**.

In simboli:

$$a_1 \underline{u}_1 + a_2 \underline{u}_2 + \dots + a_h \underline{u}_h = \underline{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_h = 0.$$

Il sistema

$$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_h$$

si dice invece **linearmente dipendente**, oppure **legato**, se non è linearmente indipendente.

1.19.1 Esempi

Esempio 1. Il sistema

$$\underline{u}_1 = (1, 1, 2), \quad \underline{u}_2 = (0, 2, 3), \quad \underline{u}_3 = (1, 3, 5)$$

è legato, infatti

$$(1, 1, 2) + (0, 2, 3) - (1, 3, 5) = (0, 0, 0).$$

Quindi

$$(1, 1, -1)$$

è una relazione non banale per $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$.

Esempio 2. Il sistema

$$(1, 0), (2, 0), (0, 1), (-7, 0)$$

è legato, perché

$$(1, 0) + 3(2, 0) + 0(0, 1) + (-7, 0) = (0, 0).$$

La relazione corrispondente è

$$(1, 3, 0, 1).$$

Esempio 3. Il sistema

$$(0, 0), (1, 2)$$

è legato, infatti

$$1(0, 0) + 0(1, 2) = (0, 0).$$

Esempio 4. Per definizione, il sistema vuoto

$$\emptyset$$

è libero.

Esempio 5. Il sistema formato da un solo vettore soddisfa:

$$\{\underline{u}\} \text{ è legato} \iff \underline{u} = \underline{0},$$

e

$$\{\underline{u}\} \text{ è libero} \iff \underline{u} \neq \underline{0}.$$

Dimostrazione.

$$(\Rightarrow) \text{ Se } \{\underline{u}\} \text{ è legato, allora } \exists a \neq 0 \text{ tale che } a\underline{u} = \underline{0}.$$

Per la legge di annullamento del prodotto segue

$$\underline{u} = \underline{0}.$$

$$(\Leftarrow) \text{ Se } \underline{u} = \underline{0},$$

allora

$$1 \cdot \underline{u} = \underline{0},$$

quindi esiste una relazione non banale e il sistema è legato.

Esempio 6. Il sistema

$$\{\underline{u}, \underline{v}\}$$

è legato se e solo se almeno uno dei due vettori è multiplo dell'altro.

Dimostrazione.

$$(\Rightarrow) \text{ Se } \{\underline{u}, \underline{v}\} \text{ è legato, allora } \exists (a_1, a_2) \neq (0, 0)$$

tale che

$$a_1\underline{u} + a_2\underline{v} = \underline{0}.$$

Se, per esempio, $a_1 \neq 0$, allora

$$\underline{u} = -\frac{a_2}{a_1}\underline{v},$$

cioè \underline{u} è multiplo di \underline{v} .

$$(\Leftarrow) \text{ Per fissare le idee, supponiamo } \underline{v} = c\underline{u}.$$

Allora

$$\underline{v} - c\underline{u} = \underline{0},$$

quindi

$$(-c, 1)$$

è una relazione non banale, e perciò il sistema è legato.

Esempio 7. Il sistema

$$\{(1, 0), (0, 1)\}$$

è libero.

Esempio 8. I vettori canonici sono linearmente indipendenti.

Per esempio, il sistema

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$$

è libero. Infatti, se

$$a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

allora

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0),$$

e quindi

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Osservazione. Il sistema

$$\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\}$$

è legato se e solo se i punti O, P, Q sono allineati.

Analogamente, il sistema

$$\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\}$$

è legato se e solo se i punti O, P, Q, R sono complanari.

Osservazione. Se tra i vettori compare il vettore nullo, il sistema è legato. Infatti, se

$$\underline{u}_1 = \underline{0},$$

allora

$$1 \cdot \underline{0} + 0 \cdot \underline{u}_2 + \cdots + 0 \cdot \underline{u}_h = \underline{0},$$

quindi esiste una relazione non banale.

Osservazione. Se in un sistema compaiono due vettori uguali, allora il sistema è legato.

Infatti, se

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{u},$$

allora

$$\underline{u} - \underline{u} + 0 \cdot \underline{u}_3 + \cdots + 0 \cdot \underline{u}_h = \underline{0},$$

e dunque

$$(1, -1, 0, \dots, 0)$$

è una relazione non banale.

Osservazione. Se

$$\underline{w} = 3\underline{u} - 5\underline{v},$$

allora il sistema

$$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$$

è legato, perché

$$-3\underline{u} + 5\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}.$$

La relazione corrispondente è

$$(-3, 5, 1).$$

1.19.2 Proprietà dei sistemi liberi e dei sistemi legati

Valgono le seguenti proprietà:

- 1) Il sistema vuoto è linearmente indipendente.
- 2) Un sistema formato da un solo vettore \underline{u} è libero se e solo se $\underline{u} \neq \underline{0}$.
- 3) Un sistema costituito da due vettori è legato se e solo se almeno uno dei due vettori è multiplo dell'altro.
- 4) Il sistema di vettori

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h$$

è linearmente dipendente se e solo se tra i vettori

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h$$

c'è un vettore \underline{u}_i che dipende linearmente dai rimanenti vettori

$$\underline{u}_1, \dots, \widehat{\underline{u}}_i, \dots, \underline{u}_h.$$

- 5) Sia \underline{u}_i un vettore appartenente al sistema

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h.$$

Allora \underline{u}_i dipende linearmente dai rimanenti vettori

$$\underline{u}_1, \dots, \widehat{\underline{u}}_i, \dots, \underline{u}_h$$

se e solo se

$$\text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h) = \text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \widehat{\underline{u}}_i, \dots, \underline{u}_h).$$

Un tale vettore \underline{u}_i si dice **sovrabbondante** rispetto al sistema

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h.$$

- 6) Sia

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h$$

un sistema di vettori linearmente indipendente. Allora i vettori di tale sistema sono tutti non nulli, sono tutti diversi tra di loro, e se S è un sottoinsieme di

$$\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h\},$$

anche S è libero.

- 7) Sia

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h$$

un sistema di vettori linearmente indipendente. Sia \underline{u} un vettore che dipende linearmente dai vettori

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h.$$

Allora \underline{u} dipende in modo unico, cioè se

$$\underline{u} = a_1 \underline{u}_1 + \dots + a_h \underline{u}_h = b_1 \underline{u}_1 + \dots + b_h \underline{u}_h,$$

allora

$$(a_1, \dots, a_h) = (b_1, \dots, b_h).$$

8) Sia

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h \quad (h \geq 2)$$

un sistema di vettori legato, e supponiamo che i primi $h - 1$ vettori

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{h-1}$$

siano liberi. Allora \underline{u}_h dipende linearmente da

$$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{h-1},$$

e

$$\text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h) = \text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{h-1}).$$

Idea guida. Queste proprietà spiegano il comportamento dei sistemi di vettori rispetto a:

- dipendenza e indipendenza lineare;
- unicità delle combinazioni lineari;
- presenza di vettori sovrabbondanti;
- possibilità di eliminare generatori inutili senza cambiare lo span.

Sono proprietà fondamentali perché verranno usate continuamente nello studio di basi, dimensione e sottospazi.

1.19.3 Dimostrazioni

1) Il sistema vuoto è linearmente indipendente. Per definizione, un sistema è libero se l'unica relazione lineare che dà il vettore nullo è quella banale.

Nel caso del sistema vuoto non esistono relazioni lineari non banali da considerare. Quindi, vacuamente, il sistema vuoto è linearmente indipendente.

All'orale questo punto si giustifica dicendo che non esistono coefficienti da scegliere, quindi non può esistere una relazione non banale.

2) Un sistema formato da un solo vettore u è libero se e solo se $u \neq 0$. Se $u = 0$, allora

$$1 \cdot u = 1 \cdot 0 = 0,$$

quindi esiste una relazione non banale e il sistema è legato.

Se $u \neq 0$, consideriamo una relazione

$$au = 0.$$

Se $a \neq 0$, essendo a uno scalare non nullo, possiamo dividere per a e otteniamo

$$u = 0,$$

contro l'ipotesi. Dunque deve essere $a = 0$, e quindi l'unica relazione è quella banale.

Un sistema costituito da un solo vettore è libero se e solo se quel vettore è diverso dal vettore nullo.

3) Un sistema costituito da due vettori è legato se e solo se almeno uno dei due è multiplo dell'altro. Siano u, v due vettori.

Se il sistema $\{u, v\}$ è legato, esiste una relazione non banale

$$au + bv = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Se $a \neq 0$, allora

$$u = -\frac{b}{a}v,$$

quindi u è multiplo di v . Se invece $a = 0$, allora necessariamente $b \neq 0$, e dalla relazione segue

$$v = 0,$$

quindi v è multiplo di u .

Viceversa, se per esempio $u = \lambda v$, allora

$$u - \lambda v = 0$$

è una relazione non banale, perciò il sistema è legato.

Per due vettori, la dipendenza lineare coincide con il fatto che essi stiano sulla stessa direzione.

4) Il sistema u_1, \dots, u_h è legato se e solo se uno dei vettori dipende linearmente dai rimanenti. Supponiamo che il sistema sia legato. Allora esiste una relazione non banale

$$a_1u_1 + \dots + a_hu_h = 0.$$

Poiché la relazione è non banale, esiste almeno un indice i tale che $a_i \neq 0$. Allora possiamo esplicitare u_i :

$$u_i = -\frac{a_1}{a_i}u_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i}u_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}u_{i+1} - \dots - \frac{a_h}{a_i}u_h.$$

Quindi u_i dipende linearmente dai rimanenti vettori.

Viceversa, se uno dei vettori, diciamo u_i , dipende linearmente dagli altri, allora esistono scalari b_j tali che

$$u_i = \sum_{j \neq i} b_j u_j.$$

Portando tutto al primo membro otteniamo una relazione non banale tra u_1, \dots, u_h , dunque il sistema è legato.

5) **Un vettore è sovrabbondante se e solo se eliminarlo non cambia lo span.** Sia $u_i \in \{u_1, \dots, u_h\}$.

Supponiamo che u_i dipenda linearmente dai rimanenti vettori. Allora

$$u_i = \sum_{j \neq i} a_j u_j.$$

Ogni combinazione lineare dei vettori u_1, \dots, u_h può allora essere riscritta usando solo

$$u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, u_h.$$

Perciò

$$\text{Span}(u_1, \dots, u_h) \subseteq \text{Span}(u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, u_h).$$

L'inclusione opposta è ovvia, perché il secondo sistema è contenuto nel primo. Dunque

$$\text{Span}(u_1, \dots, u_h) = \text{Span}(u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, u_h).$$

Viceversa, se gli span coincidono, allora in particolare

$$u_i \in \text{Span}(u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, u_h),$$

cioè u_i dipende linearmente dai rimanenti.

Un vettore è **sovrabbondante** se la sua eliminazione non modifica il sottospazio generato.

6) **Se un sistema è libero, allora i suoi vettori sono non nulli, distinti, e ogni sottoinsieme è libero.** Se uno dei vettori fosse nullo, il sistema sarebbe legato per il punto 2. Se due vettori coincidessero, diciamo $u_i = u_j$ con $i \neq j$, allora

$$u_i - u_j = 0$$

sarebbe una relazione non banale, e il sistema sarebbe legato.

Resta da provare che ogni sottoinsieme di un sistema libero è ancora libero. Sia

$$S = \{u_1, \dots, u_k\}$$

un sottoinsieme del sistema libero $\{u_1, \dots, u_h\}$. Se avessimo una relazione

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0,$$

potremmo anche scriverla come

$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \dots + 0 \cdot u_h = 0.$$

Poiché il sistema completo è libero, segue

$$a_1 = \dots = a_k = 0.$$

Quindi anche S è libero.

7) **Unicità della combinazione lineare in un sistema libero.** Supponiamo che

$$u = a_1u_1 + \cdots + a_hu_h = b_1u_1 + \cdots + b_hu_h.$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$0 = (a_1 - b_1)u_1 + \cdots + (a_h - b_h)u_h.$$

Poiché u_1, \dots, u_h sono liberi, l'unica relazione possibile è quella banale, dunque

$$a_1 - b_1 = \cdots = a_h - b_h = 0.$$

Quindi

$$(a_1, \dots, a_h) = (b_1, \dots, b_h).$$

Questo prova l'unicità.

8) **Se u_1, \dots, u_h è legato e u_1, \dots, u_{h-1} sono liberi, allora u_h dipende dai precedenti.** Poiché il sistema u_1, \dots, u_h è legato, esiste una relazione non banale

$$a_1u_1 + \cdots + a_hu_h = 0.$$

Mostriamo che deve essere $a_h \neq 0$. Se infatti $a_h = 0$, allora resterebbe una relazione non banale

$$a_1u_1 + \cdots + a_{h-1}u_{h-1} = 0$$

tra i vettori u_1, \dots, u_{h-1} , contro il fatto che essi sono liberi.

Dunque $a_h \neq 0$, e possiamo esplicitare u_h :

$$u_h = -\frac{a_1}{a_h}u_1 - \cdots - \frac{a_{h-1}}{a_h}u_{h-1}.$$

Quindi u_h dipende linearmente da u_1, \dots, u_{h-1} . Inoltre, da ciò segue immediatamente che

$$\text{Span}(u_1, \dots, u_h) = \text{Span}(u_1, \dots, u_{h-1}).$$

Questa è esattamente l'idea del vettore sovrabbondante.

Lettura concettuale del punto 8. Se aggiungo ad un sistema libero un vettore che rende il sistema legato, allora quel nuovo vettore non porta informazione nuova: è necessariamente combinazione lineare dei precedenti.

1.19.4 Criterio operativo per riconoscere un vettore sovrabbondante

Sia u_i un vettore del sistema u_1, \dots, u_h . Allora u_i è sovrabbondante se e solo se esiste una relazione

$$a_1u_1 + \cdots + a_iu_i + \cdots + a_hu_h = 0$$

con

$$a_i \neq 0.$$

Infatti, in questo caso si può esplicitare u_i come combinazione lineare dei rimanenti vettori.

1.19.5 Esempio: un vettore sovrabbondante

Sia

$$W := \text{Span}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)).$$

Osserviamo che

$$(1, 0, 0) + (0, 1, 0) - (1, 1, 0) = 0.$$

Quindi la terna

$$(1, 1, -1)$$

è una relazione non banale tra i tre generatori di W .

Per il criterio appena visto, è sovrabbondante ogni vettore che compare con coefficiente diverso da 0 nella relazione. In questo caso compaiono tutti e tre i vettori, quindi ciascuno di essi è sovrabbondante.

Di conseguenza possiamo scrivere indifferentemente

$$W = \text{Span}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$$

oppure

$$W = \text{Span}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$$

oppure

$$W = \text{Span}((0, 1, 0), (1, 1, 0)).$$

1.19.6 Esercizio: determinare un sistema di generatori libero per W

Esercizio 1.30. Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^4 :

$$W = \text{Span}((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (0, 0, 0, 1), (3, 3, 3, 4)).$$

Determinare un sistema di generatori per W che sia libero.

L'idea è la seguente: si calcolano le relazioni lineari tra i generatori assegnati. Se l'unica relazione fosse quella banale, allora il sistema sarebbe già libero. Se invece esiste una relazione non banale, allora esiste un vettore sovrabbondante; lo si elimina e si ripete il procedimento sui vettori rimanenti.

Una quadrupla (x, y, z, t) è una relazione per il sistema assegnato se e solo se

$$x(1, 1, 1, 1) + y(1, 1, 1, 2) + z(0, 0, 0, 1) + t(3, 3, 3, 4) = (0, 0, 0, 0).$$

Confrontando le componenti si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3t = 0, \\ x + 2y + z + 4t = 0. \end{cases}$$

Le sue soluzioni sono tutti e soli i vettori numerici della forma

$$(z - 2t, -z - t, z, t), \quad z, t \in \mathbb{R}.$$

In particolare,

$$(-2, -1, 0, 1)$$

è una relazione non banale. Dunque il quarto vettore $(3, 3, 3, 4)$ è sovrabbondante. Possiamo allora eliminarlo e considerare il sistema

$$(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (0, 0, 0, 1).$$

Verifichiamo ora se questo nuovo sistema è libero. Cerchiamo le relazioni:

$$a(1, 1, 1, 1) + b(1, 1, 1, 2) + c(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Confrontando le componenti otteniamo

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a + 2b + c = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue

$$a = -b.$$

Sostituendo nella seconda:

$$-b + 2b + c = 0 \implies b + c = 0 \implies c = -b.$$

Quindi le relazioni sono della forma

$$(-b, b, -b) = b(-1, 1, -1).$$

Esiste quindi una relazione non banale, ad esempio

$$-(1, 1, 1, 1) + (1, 1, 1, 2) - (0, 0, 0, 1) = 0.$$

Ne segue che anche in questo sistema ogni vettore che compare con coefficiente non nullo è sovrabbondante. In particolare possiamo eliminare, per esempio, il secondo vettore.

Rimane così il sistema

$$(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1).$$

Questi due vettori non sono multipli l'uno dell'altro, dunque sono liberi.

Pertanto un sistema di generatori libero per W è dato da

$$(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1).$$