Appunti di Fisica 1

Secondo Semestre

Anno 2025/26 • Prof. Simone Sanna

Diego Marini
diego@marini.work | marini.work

Ultimo aggiornamento: 19 marzo 2026

Nota: questi appunti sono in continuo aggiornamento. Eventuali refusi o imprecisioni possono essere segnalati e verranno corretti nelle revisioni successive.

Indice

Come sono strutturati questi appunti

- **Elementi di Fisica - Mazzoldi** come testo di riferimento.
- **Definizioni** in evidenza per fissare le nozioni fondamentali.
- **Leggi e principi** accompagnati, quando utile, da derivazioni o giustificazioni.
- **Esempi ed esercizi** svolti con passaggi espliciti e controllo delle unità di misura.
- Notazione e convenzioni mantenute coerenti lungo tutto il testo.

1 Meccanica

1.1 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Una **grandezza scalare** è completamente determinata da un numero reale e dalla relativa unità di misura.
Una **grandezza vettoriale** è caratterizzata da:

- modulo;
- direzione;
- verso.

Esempi di grandezze scalari sono la massa, la temperatura e l'energia.
Esempi di grandezze vettoriali sono lo spostamento, la velocità, l'accelerazione e la forza.

Osservazione

Una grandezza vettoriale può essere rappresentata geometricamente mediante un segmento orientato.
All'orale conviene sottolineare subito la differenza concettuale fondamentale:

- lo **scalare** descrive soltanto *quanto*;
- il **vettore** descrive anche *come la grandezza è orientata nello spazio*.

1.2 Vettori, modulo e versori

Sia $\vec{v}$ un vettore.
Il **modulo** del vettore, indicato con $|\vec{v}|$, rappresenta la sua lunghezza.

Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, il **versore** associato a $\vec{v}$ è definito come

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Il versore ha modulo unitario e possiede la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$.

Osservazione

Ogni vettore non nullo può essere scritto nella forma

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{u},$$

separando il *modulo* dalla *direzione e dal verso*.
Questa decomposizione sarà decisiva più avanti, quando studieremo vettori dipendenti dal tempo.

Osservazione 1.1. La condizione $\vec{v} \neq \vec{0}$ è necessaria: il versore del vettore nullo non è definito, perché non avrebbe senso dividere per $|\vec{v}| = 0$.

1.3 Somma di vettori e prodotto per scalare

La somma di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si definisce geometricamente tramite la **regola del parallelogramma** (equivalentemente, metodo punta-coda).

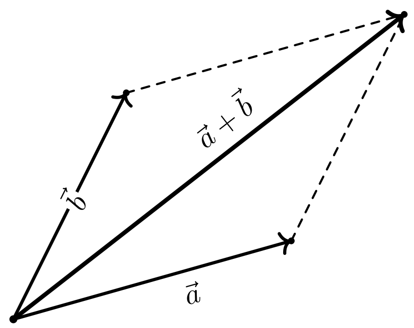

Figura 1: Metodo del parallelogramma: la diagonale rappresenta $\vec{a}+\vec{b}$.

Il prodotto di un vettore per uno scalare reale $\lambda \in \mathbb{R}$ modifica il modulo del vettore. Se $\lambda > 0$ il verso resta invariato, mentre se $\lambda < 0$ il verso si inverte.

Osservazione

All'orale conviene dire che la moltiplicazione per uno scalare agisce:

- sull'**intensità** del vettore;
- sul **verso** se lo scalare è negativo.

1.4 Prodotto scalare

1.4.1 Definizione geometrica

Il **prodotto scalare** tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è definito come

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta,$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori.

Osservazione

Interpretazione geometrica:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,\big(|\vec{b}| \cos\theta\big),$$

dove $|\vec{b}| \cos\theta$ è la lunghezza della proiezione di $\vec{b}$ sulla direzione di $\vec{a}$.

1.4.2 Espressione in componenti

Siano $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ e scriviamoli rispetto ai versori cartesiani:

$$\vec{a} = a_x\,\hat{u}_x + a_y\,\hat{u}_y + a_z\,\hat{u}_z, \qquad \vec{b} = b_x\,\hat{u}_x + b_y\,\hat{u}_y + b_z\,\hat{u}_z.$$

Poiché i versori hanno modulo unitario e sono mutuamente ortogonali, vale

$$\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \qquad (i, j \in \{x, y, z\}).$$

Sviluppiamo il prodotto:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z) \cdot (b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y + b_z \hat{u}_z) \\ &= a_x b_x (\hat{u}_x \cdot \hat{u}_x) + a_x b_y (\hat{u}_x \cdot \hat{u}_y) + a_x b_z (\hat{u}_x \cdot \hat{u}_z) \\ &\quad + a_y b_x (\hat{u}_y \cdot \hat{u}_x) + a_y b_y (\hat{u}_y \cdot \hat{u}_y) + a_y b_z (\hat{u}_y \cdot \hat{u}_z) \\ &\quad + a_z b_x (\hat{u}_z \cdot \hat{u}_x) + a_z b_y (\hat{u}_z \cdot \hat{u}_y) + a_z b_z (\hat{u}_z \cdot \hat{u}_z). \end{aligned}$$

Poiché i versori sono ortogonali tra loro, tutti i prodotti scalari tra versori diversi sono nulli. Restano soltanto i termini diagonali.

Se

$$\vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z, \qquad \vec{b} = b_x \hat{u}_x + b_y \hat{u}_y + b_z \hat{u}_z,$$

allora

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Per l'orale. La formula in componenti è perfettamente coerente con la definizione geometrica

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta.$$

In particolare, il prodotto scalare misura quanto un vettore è "allineato" con l'altro.

Due vettori sono **ortogonali** se e solo se

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

1.5 Interpretazione geometrica del prodotto scalare

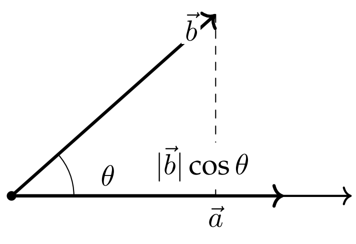

Figura 2: Proiezione di $\vec{b}$ sulla direzione di $\vec{a}$.

1.6 Versori fondamentali

Nel sistema cartesiano tridimensionale si introducono i versori fondamentali

$$\hat{u}_x, \qquad \hat{u}_y, \qquad \hat{u}_z,$$

associati rispettivamente agli assi x, y e z.

I versori cartesiani hanno modulo unitario:

$$|\hat{u}_x| = |\hat{u}_y| = |\hat{u}_z| = 1,$$

e sono a due a due ortogonali:

$$\hat{u}_x \cdot \hat{u}_y = 0, \qquad \hat{u}_x \cdot \hat{u}_z = 0, \qquad \hat{u}_y \cdot \hat{u}_z = 0.$$

Osservazione

Questi versori costituiscono la base naturale per esprimere i vettori in componenti cartesiane.

1.7 Rappresentazione geometrica dei versori

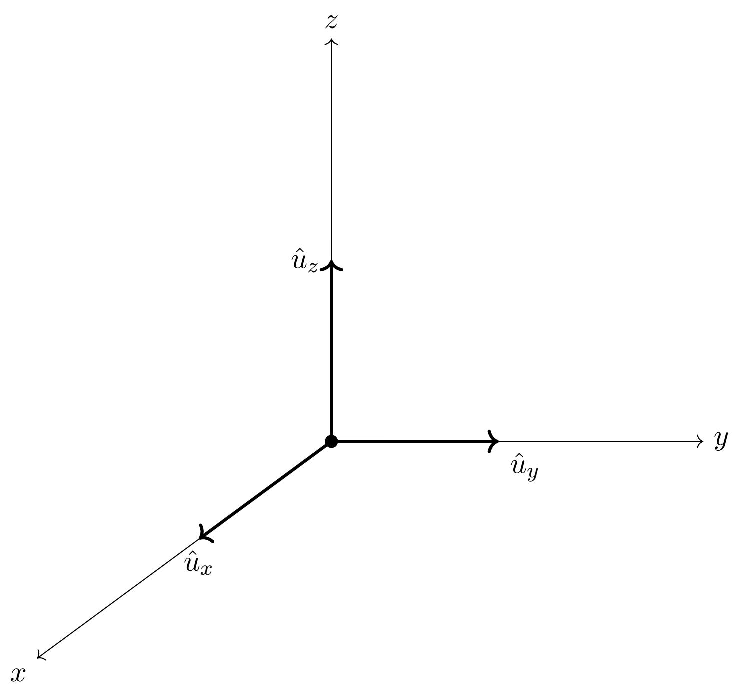

Figura 3: Assi cartesiani e versori fondamentali.

1.8 Prodotto vettoriale

1.8.1 Definizione geometrica

Il **prodotto vettoriale** tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il vettore

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

avente:

- modulo $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$;
- direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
- verso determinato dalla regola della mano destra.

Osservazione

Il modulo del prodotto vettoriale rappresenta l'area del parallelogramma avente per lati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

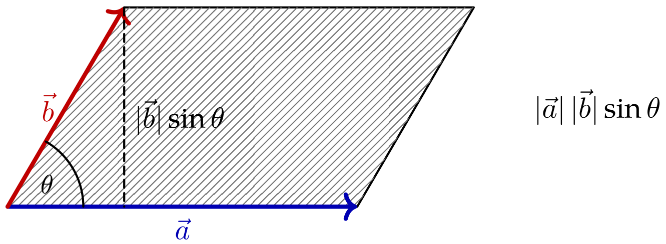

Figura 4: L'area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$.

1.8.2 Relazioni tra versori fondamentali

I versori cartesiani soddisfano le relazioni fondamentali:

$$\hat{u}_x \times \hat{u}_y = \hat{u}_z, \qquad \hat{u}_y \times \hat{u}_z = \hat{u}_x, \qquad \hat{u}_z \times \hat{u}_x = \hat{u}_y.$$

Invertendo l'ordine si ottiene il segno opposto:

$$\hat{u}_y \times \hat{u}_x = -\hat{u}_z, \qquad \hat{u}_z \times \hat{u}_y = -\hat{u}_x, \qquad \hat{u}_x \times \hat{u}_z = -\hat{u}_y.$$

Inoltre

$$\hat{u}_x \times \hat{u}_x = \hat{u}_y \times \hat{u}_y = \hat{u}_z \times \hat{u}_z = \vec{0}.$$

1.8.3 Formula in componenti

Consideriamo due vettori

$$\vec{a} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z, \qquad \vec{b} = b_x\hat{u}_x + b_y\hat{u}_y + b_z\hat{u}_z.$$

Sviluppiamo il prodotto vettoriale usando la distributività:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z) \times (b_x\hat{u}_x + b_y\hat{u}_y + b_z\hat{u}_z).$$

Sviluppando tutti i prodotti:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} = {} & a_xb_x(\hat{u}_x \times \hat{u}_x) + a_xb_y(\hat{u}_x \times \hat{u}_y) + a_xb_z(\hat{u}_x \times \hat{u}_z) \\ & + a_yb_x(\hat{u}_y \times \hat{u}_x) + a_yb_y(\hat{u}_y \times \hat{u}_y) + a_yb_z(\hat{u}_y \times \hat{u}_z) \\ & + a_zb_x(\hat{u}_z \times \hat{u}_x) + a_zb_y(\hat{u}_z \times \hat{u}_y) + a_zb_z(\hat{u}_z \times \hat{u}_z).\end{aligned}$$

Usando le proprietà dei versori, i termini con versori uguali sono nulli e si ottiene:

Se

$$\vec{a} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z, \qquad \vec{b} = b_x\hat{u}_x + b_y\hat{u}_y + b_z\hat{u}_z,$$

allora

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{u}_x + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{u}_y + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{u}_z.$$

1.8.4 Metodo del determinante

La formula precedente può essere ricordata in modo compatto mediante il seguente determinante formale:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Osservazione

Il determinante si sviluppa rispetto alla prima riga:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{u}_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{u}_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{u}_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

si ritrova esattamente la formula in componenti.

Per l'orale. Il prodotto vettoriale produce un *vettore* perpendicolare al piano dei due vettori assegnati, mentre il prodotto scalare produce uno *scalare*. Questa differenza va detta chiaramente.

Approfondimenti utili per l'orale

Proprietà del prodotto scalare. Per ogni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Proprietà del prodotto vettoriale. Per ogni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Esempio guidato

Esercizio 1.2. Siano dati i vettori

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare:

- il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
- il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$.

Dati. I vettori sono paralleli, infatti
$$\vec{b} = 2\vec{a}.$$

Prodotto scalare. Usiamo la formula in componenti:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Nel nostro caso:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6.$$

Prodotto vettoriale. Poiché i due vettori sono paralleli, l'angolo tra essi è $\theta = 0$, quindi

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta = 0.$$

Di conseguenza:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Verifica in componenti.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2)\hat{u}_x + (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2)\hat{u}_y + (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2)\hat{u}_z = \vec{0}.$$

1.9 Vettori dipendenti dal tempo

In meccanica capita spesso di considerare vettori che **variano nel tempo**. In tal caso scriviamo, per esempio,
$$\vec{v} = \vec{v}(t),$$
per indicare che il vettore $\vec{v}$ è funzione del tempo t.

Se il tempo passa da t a $t + \Delta t$, il vettore può cambiare nel modulo, nella direzione e nel verso.

Si definisce **incremento** del vettore $\vec{v}(t)$ nell'intervallo di tempo Δt la quantità

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t).$$

Osservazione

L'incremento $\Delta\vec{v}$ è ancora un vettore e rappresenta la variazione complessiva di $\vec{v}$ tra i due istanti considerati.

1.10 Derivata di un vettore rispetto al tempo

Come per le funzioni scalari, anche per una funzione vettoriale si introduce il rapporto incrementale e poi il limite.

La **derivata temporale** del vettore $\vec{v}(t)$ è definita come

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t},$$

quando tale limite esiste.

Per l'orale. La derivata di un vettore descrive *se* e *come* il vettore sta variando nel tempo. In particolare tiene conto simultaneamente di variazioni di modulo, direzione e verso.

1.11 Regole di derivazione per vettori

Se $\vec{a}(t)$ e $\vec{b}(t)$ sono vettori dipendenti dal tempo e $f(t)$ è una funzione scalare, allora

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{a} + \vec{b}\big) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Inoltre

$$\frac{d}{dt}\big(f\vec{a}\big) = \frac{df}{dt}\,\vec{a} + f\,\frac{d\vec{a}}{dt}.$$

Per il prodotto scalare vale

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Per il prodotto vettoriale vale

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{a} \times \vec{b}\big) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

1.12 Espressione in componenti

Supponiamo di lavorare in un sistema di assi cartesiani **fissi** con versori fondamentali

$$\hat{u}_x, \qquad \hat{u}_y, \qquad \hat{u}_z.$$

Se

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y + v_z(t)\hat{u}_z,$$

allora, poiché i versori cartesiani non dipendono dal tempo, derivando membro a membro otteniamo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\hat{u}_z.$$

Quando la base cartesiana è **fissa**, tutta la dipendenza dal tempo è contenuta nelle componenti. Perciò la derivata di un vettore si ottiene derivando semplicemente le componenti.

1.13 Derivata di un versore

Consideriamo ora un **versore variabile nel tempo**, che indichiamo con

$$\hat{u} = \hat{u}(t).$$

Poiché si tratta di un versore, il suo modulo resta costante ed è sempre uguale a 1:

$$|\hat{u}(t)| = 1 \qquad \text{per ogni } t.$$

L'incremento del versore $\hat{u}(t)$ è

$$\Delta\hat{u} = \hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t).$$

Di conseguenza,

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t}.$$

Osservazione 1.3. La differenza tra due versori **non è in generale un versore**.

1.14 Perché la derivata di un versore è perpendicolare al versore

Poiché $|\hat{u}(t)| = 1$, vale

$$\hat{u}(t) \cdot \hat{u}(t) = 1.$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{d}{dt}\big(\hat{u} \cdot \hat{u}\big) = 0.$$

Usando la regola di derivazione del prodotto scalare,

$$\frac{d\hat{u}}{dt} \cdot \hat{u} + \hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{dt} = 0.$$

I due termini sono uguali, quindi

$$2\,\hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{dt} = 0,$$

da cui segue

$$\hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{dt} = 0.$$

La derivata di un versore è sempre **ortogonale** al versore stesso:

$$\hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{dt} = 0.$$

Per l'orale. Questa relazione significa che la derivata di un versore non descrive una variazione di modulo, ma esclusivamente una variazione di direzione.

1.15 Interpretazione geometrica sul cerchio unitario

Se $\hat{u}(t)$ è un versore piano, la sua punta si muove sul **cerchio di raggio unitario**. Quando il tempo passa da t a $t + \Delta t$, il versore ruota di un piccolo angolo $\Delta\theta$.

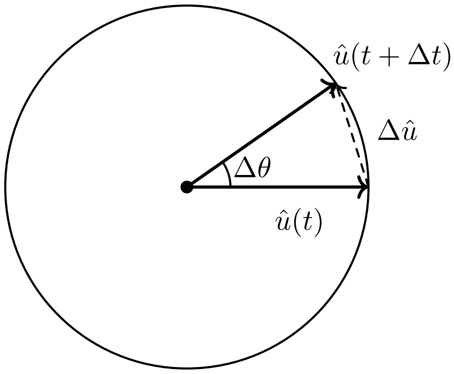

Figura 5: Variazione di un versore sul cerchio unitario.

Per piccoli angoli, la corda che unisce le due punte dei versori è approssimativamente uguale all'arco corrispondente. Poiché il raggio del cerchio è 1, la lunghezza dell'arco è

$$\Delta s = 1 \cdot \Delta\theta = \Delta\theta.$$

Quindi, per $\Delta t \to 0$,

$$|\Delta\hat{u}| \sim \Delta\theta.$$

Dividendo per Δt e passando al limite si ottiene

$$\left|\frac{d\hat{u}}{dt}\right| = \frac{d\theta}{dt}.$$

1.16 Formula fondamentale della derivata di un versore

Introduciamo il versore $\hat{u}_N$, perpendicolare a $\hat{u}$ e orientato nel verso in cui il versore $\hat{u}$ sta ruotando.

La derivata di un versore si può scrivere nella forma

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_N.$$

Osservazione

Questa formula riassume due fatti fondamentali:

- il modulo di $\frac{d\hat{u}}{dt}$ è $\frac{d\theta}{dt}$;
- la direzione di $\frac{d\hat{u}}{dt}$ è perpendicolare a $\hat{u}$.

Osservazione 1.4. Nel seguito useremo talvolta la notazione

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Pertanto la formula precedente si può scrivere anche nella forma

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{u}_N.$$

1.17 Rappresentazione di un vettore come modulo per versore

Ogni vettore non nullo può essere scritto come

$$\vec{v} = v\,\hat{u},$$

dove

$$v = |\vec{v}|$$

è il modulo di $\vec{v}$ e $\hat{u}$ è il versore che ne individua direzione e verso.

Questa scrittura è molto utile quando il vettore dipende dal tempo, perché permette di separare la variazione del modulo dalla variazione della direzione.

1.18 Derivata di un vettore scritto come $\vec{v} = v\hat{u}$

Partiamo dalla decomposizione

$$\vec{v} = v\,\hat{u}.$$

Derivando rispetto al tempo e applicando la regola di derivazione del prodotto otteniamo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u} + v\frac{d\hat{u}}{dt}.$$

Sostituendo la formula fondamentale per la derivata del versore,

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N,$$

segue

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u} + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N.$$

Se

$$\vec{v} = v\,\hat{u},$$

allora

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u} + v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N.$$

Osservazione

I due termini hanno significato diverso:

- $\dfrac{dv}{dt}\hat{u}$ descrive la variazione del **modulo**;
- $v\dfrac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$ descrive la variazione della **direzione**.

1.19 Interpretazione geometrica dei due contributi

I due addendi

$$\frac{dv}{dt}\hat{u} \qquad \text{e} \qquad v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$$

sono tra loro perpendicolari, perché $\hat{u} \perp \hat{u}_N$.

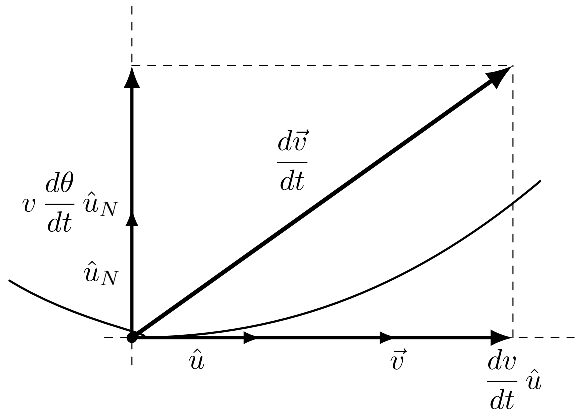

Figura 6: Scomposizione di $\frac{d\vec{v}}{dt}$ nelle componenti tangenziale e normale.

Poiché i due contributi sono ortogonali, il modulo della derivata si ottiene con il teorema di Pitagora.

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\frac{d\theta}{dt}\right)^2}.$$

1.20 Casi particolari

1. Varia soltanto il modulo

Se la direzione del vettore resta costante, allora

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Pertanto

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}.$$

2. Varia soltanto la direzione

Se il modulo resta costante, allora

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Quindi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N.$$

Lettura fisica. La variazione di un vettore dipende da due meccanismi distinti:

- un cambiamento della sua intensità;
- una rotazione della sua direzione.

Questa decomposizione sarà alla base dello studio del moto curvilineo.

1.21 Passaggio alla cinematica

Gli strumenti vettoriali introdotti fin qui permettono ora di descrivere rigorosamente il moto di un punto materiale.

1.22 Cinematica del punto materiale

La **cinematica** è la parte della meccanica che studia il moto dei corpi **senza indagarne le cause**.
Nel seguito considereremo il **punto materiale**, cioè un corpo le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze caratteristiche del problema.

La cinematica descrive **come** un corpo si muove. La **dinamica**, invece, studia **perché** si muove.

1.22.1 Traiettoria e legge oraria

La **traiettoria** è il luogo geometrico dei punti occupati dal punto materiale durante il moto.

La **legge oraria** è la funzione che associa a ogni istante t la posizione del punto materiale. Nel caso di un moto rettilineo essa si scrive

$$x = x(t).$$

Osservazione

Non bisogna confondere:

- la **traiettoria**, che è un oggetto geometrico nello spazio;
- la **legge oraria**, che è una funzione del tempo.

Nel moto rettilineo la traiettoria è una retta, mentre $x(t)$ indica la posizione del punto materiale lungo tale retta all'istante t.

Il grafico di x in funzione di t **non è la traiettoria del moto**: è soltanto la rappresentazione dell'andamento temporale della posizione.

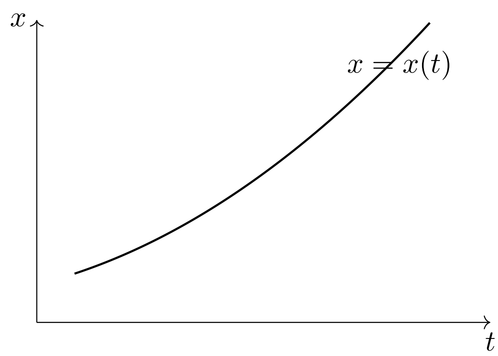

Figura 7: Grafico qualitativo della legge oraria $x(t)$.

1.22.2 Tipi di moto

Possiamo distinguere, a seconda del contesto geometrico, i seguenti casi:

- **moto rettilineo**: la traiettoria è una retta;
- **moto unidimensionale**: il moto è descritto da una sola coordinata;
- **moto piano**: il moto avviene in un piano;
- **moto tridimensionale**: il moto avviene nello spazio.

Nel seguito ci concentreremo soprattutto sul **moto rettilineo**, che è anche un moto unidimensionale.

1.22.3 Spostamento e intervallo di tempo

Consideriamo due istanti t_1 e t_2, con $t_2 > t_1$, e indichiamo con

$$x_1 = x(t_1), \qquad x_2 = x(t_2)$$

le posizioni del punto materiale in tali istanti.

Definiamo:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta t = t_2 - t_1.$$

La quantità Δx si chiama **spostamento** del punto materiale nell'intervallo di tempo Δt.

1.22.4 Velocità media

La **velocità media** nell'intervallo $[t_1, t_2]$ è definita da

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Osservazione

La velocità media fornisce un'informazione globale sul moto nell'intervallo considerato, ma non descrive come il punto materiale si sia mosso nei singoli istanti interni all'intervallo.

Nel grafico x-t, la velocità media coincide con il coefficiente angolare della **retta secante** che unisce i punti

$$(t_1, x_1), \qquad (t_2, x_2).$$

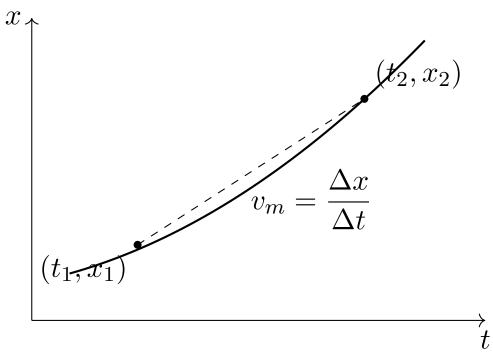

Figura 8: Interpretazione geometrica della velocità media.

1.22.5 Velocità istantanea

Per ottenere una descrizione locale del moto, restringiamo progressivamente l'intervallo temporale.

La **velocità istantanea** all'istante t è il limite della velocità media per $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

La velocità istantanea è la **derivata** della legge oraria rispetto al tempo.

Osservazione

Nel grafico x-t, la velocità istantanea coincide con il coefficiente angolare della **retta tangente** al grafico nel punto considerato.

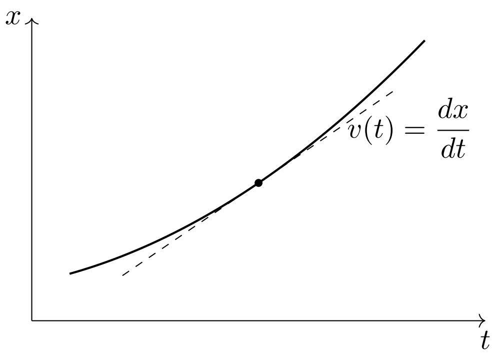

Figura 9: Interpretazione geometrica della velocità istantanea.

1.22.6 Accelerazione media e accelerazione istantanea

Se la velocità varia nel tempo, introduciamo il concetto di accelerazione.

L'**accelerazione media** nell'intervallo $[t_1, t_2]$ è definita da

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

L'**accelerazione istantanea** all'istante t è

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Poiché

$$v(t) = \frac{dx}{dt},$$

segue immediatamente che

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

L'accelerazione misura come varia la velocità nel tempo. Il segno di a da solo non basta a dire il verso del moto: per questo bisogna guardare anche il segno della velocità.

1.22.7 Esempio immediato

Se

$$x(t) = t^2,$$

allora

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2t, \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = 2.$$

Osservazione

In questo esempio la velocità cresce linearmente con il tempo, mentre l'accelerazione è costante.

1.22.8 Unità di misura

Nel Sistema Internazionale:

$$[x] = \mathrm{m}, \qquad [t] = \mathrm{s}, \qquad [v] = \mathrm{m/s}, \qquad [a] = \mathrm{m/s^2}.$$

1.22.9 Perché in una dimensione i vettori non sono indispensabili

Osservazione

Nel moto rettilineo tutte le grandezze cinematiche sono dirette lungo uno stesso asse. Per questo posizione, velocità e accelerazione possono essere descritte da numeri reali con segno:

$$x(t), \qquad v(t), \qquad a(t).$$

In una dimensione il segno della grandezza contiene già l'informazione sul verso:

- segno positivo: verso positivo dell'asse;
- segno negativo: verso opposto.

1.22.10 Dall'accelerazione alla velocità

Se conosciamo l'accelerazione come funzione del tempo, possiamo ricavare la velocità integrando.

Poiché

$$a(t) = \frac{dv}{dt},$$

si ha

$$dv = a(t)\,dt.$$

Integrando tra l'istante iniziale t_0 e un generico istante t:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau,$$

da cui

$$v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau.$$

La velocità si può esprimere nella forma

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau.$$

1.22.11 Dalla velocità alla posizione

Poiché

$$v(t) = \frac{dx}{dt},$$

abbiamo

$$dx = v(t)\,dt.$$

Integrando tra t_0 e t:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau,$$

cioè

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau.$$

La legge oraria si può scrivere come

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau.$$

Osservazione

Per determinare completamente il moto bisogna conoscere le **condizioni iniziali**:

$$t_0, \qquad x_0 = x(t_0), \qquad v_0 = v(t_0).$$

1.22.12 Moto rettilineo uniforme

Se l'accelerazione è nulla,

$$a(t) = 0,$$

allora la velocità è costante:

$$v(t) = v_0.$$

Un moto con velocità costante si chiama **moto rettilineo uniforme**.

Integrando:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 \, d\tau = x_0 + v_0(t - t_0).$$

La legge oraria del moto rettilineo uniforme è

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0).$$

Nel moto rettilineo uniforme il punto materiale percorre spostamenti uguali in tempi uguali. Il grafico x-t è una retta.

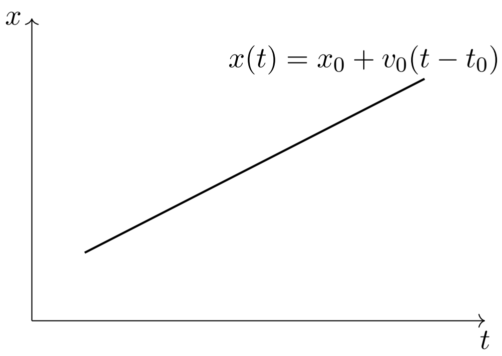

Figura 10: Legge oraria del moto rettilineo uniforme.

1.22.13 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Se l'accelerazione è costante,

$$a(t) = a_0,$$

il moto si chiama **moto rettilineo uniformemente accelerato**.

Dalla formula generale:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_0 \, d\tau = v_0 + a_0(t - t_0).$$

Poi:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a_0(\tau - t_0)] \, d\tau,$$

da cui

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2.$$

Le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato sono:

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0),$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2.$$

Nel moto uniformemente accelerato:

- il grafico v-t è una retta;
- il grafico x-t è una parabola.

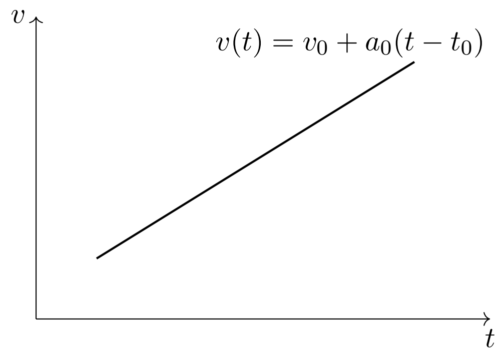

Figura 11: Grafico della velocità nel moto rettilineo uniformemente accelerato.

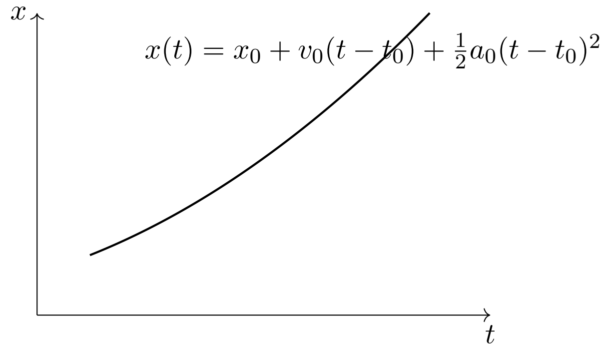

Figura 12: Grafico della legge oraria nel moto rettilineo uniformemente accelerato.

1.22.14 Accelerazione variabile nel tempo

Se l'accelerazione dipende dal tempo,

$$a(t) = f(t),$$

allora il problema va studiato caso per caso:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau, \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau.$$

Osservazione

In questo caso non esiste una formula unica valida sempre: bisogna calcolare gli integrali per la specifica funzione assegnata.

1.22.15 Significato del segno di velocità e accelerazione

Poiché

$$v(t) = \frac{dx}{dt},$$

il segno della velocità indica il verso del moto:

$$v > 0 \Rightarrow \text{moto nel verso positivo dell'asse,}$$

$$v < 0 \Rightarrow \text{moto nel verso negativo dell'asse.}$$

L'accelerazione, invece, non indica direttamente il verso di percorrenza. Per capire se il punto materiale sta aumentando o diminuendo la propria rapidità, bisogna confrontare il segno di a con quello di v.

a	v	Effetto sul modulo di v
$a > 0$	$v > 0$	aumenta
$a > 0$	$v < 0$	diminuisce
$a < 0$	$v > 0$	diminuisce
$a < 0$	$v < 0$	aumenta

In sintesi:

- se a e v hanno lo stesso segno, il modulo della velocità aumenta;
- se a e v hanno segno opposto, il modulo della velocità diminuisce.

1.22.16 Esempio: accelerazione proporzionale al tempo

Siano assegnate le condizioni iniziali

$$t_0 = 0, \qquad x_0 = 0, \qquad v_0 = -2\,\mathrm{m/s},$$

e l'accelerazione

$$a(t) = kt, \qquad k = 0.1\,\mathrm{m/s^3}.$$

Calcolo della velocità. Poiché

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = kt,$$

integrando tra 0 e t si ottiene

$$v(t) = v_0 + \int_0^t k\tau\,d\tau = v_0 + \frac{1}{2}kt^2.$$

Dunque

$$v(t) = -2 + \frac{1}{2}kt^2.$$

Istante di arresto. Il punto si arresta quando $v(t) = 0$:

$$-2 + \frac{1}{2}kt^2 = 0.$$

Da cui

$$\frac{1}{2}kt^2 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad t^2 = \frac{4}{k}.$$

Per $k = 0.1$:

$$t^2 = 40 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \sqrt{40}\,\mathrm{s} \approx 6.32\,\mathrm{s}.$$

Calcolo della posizione. Poiché

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)\,d\tau,$$

si ha

$$x(t) = \int_0^t \left(-2 + \frac{1}{2}k\tau^2\right) d\tau = -2t + \frac{1}{6}kt^3.$$

Per questo moto:

$$v(t) = -2 + \frac{1}{2}kt^2, \qquad x(t) = -2t + \frac{1}{6}kt^3.$$

L'istante in cui il punto materiale si arresta è

$$t = \sqrt{\frac{4}{k}} = \sqrt{40}\,\mathrm{s}.$$

All'inizio il punto materiale si muove nel verso negativo, perché $v_0 < 0$. Poiché però l'accelerazione è positiva, la velocità cresce, si annulla a un certo istante e poi diventa positiva.

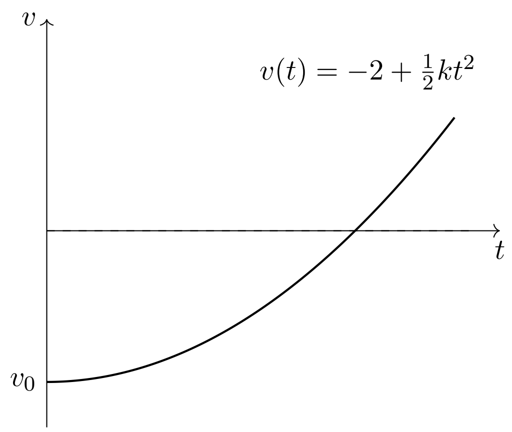

Figura 13: Grafico qualitativo della velocità per $a(t) = kt$.

1.22.17 Esempio: caduta libera

Consideriamo un corpo lasciato da fermo da un'altezza h, con

$$x_0 = h, \qquad t_0 = 0, \qquad v_0 = 0,$$

e accelerazione costante

$$a(t) = -g.$$

Velocità.

$$v(t) = v_0 + \int_0^t (-g)\, d\tau = -gt.$$

Posizione.

$$x(t) = h + \int_0^t (-g\tau)\, d\tau = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Nel moto di caduta libera, assumendo l'asse verticale orientato verso l'alto, si ha:

$$v(t) = -gt, \qquad x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Il segno meno compare perché abbiamo scelto il verso positivo verso l'alto, mentre l'accelerazione di gravità è diretta verso il basso.

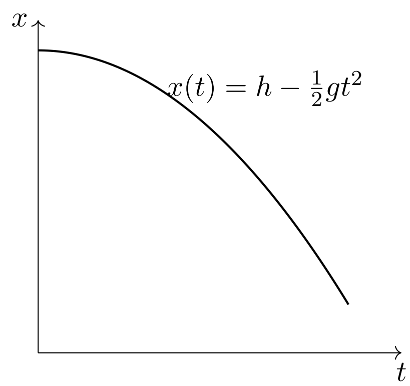

Figura 14: Legge oraria della caduta libera con asse positivo verso l'alto.

1.23 Corpo lanciato verticalmente dal suolo

Consideriamo un punto materiale lanciato verticalmente verso l'alto dal suolo con velocità iniziale $v_0 > 0$. Scegliamo un asse verticale x, orientato verso l'alto, con origine nel punto di lancio.

Nel moto verticale verso l'alto, trascurando la resistenza dell'aria, valgono le condizioni:

$$x(0) = 0, \qquad v(0) = v_0, \qquad a(t) = -g,$$

dove $g > 0$ è il modulo dell'accelerazione di gravità.

Poiché l'accelerazione è costante, possiamo usare la legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Nel nostro caso:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo la velocità:

$$v(t) = \dot{x}(t) = v_0 - gt.$$

Osservazione

Il segno negativo davanti a g dipende dalla scelta dell'asse: abbiamo scelto positivo il verso verso l'alto, mentre l'accelerazione di gravità è diretta verso il basso.

1.23.1 Istante di quota massima

Il corpo raggiunge la quota massima quando la velocità si annulla:

$$v(t) = 0.$$

Quindi:

$$v_0 - gt = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_{\max} = \frac{v_0}{g}.$$

L'istante in cui il corpo raggiunge l'altezza massima è

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g}.$$

1.23.2 Altezza massima

Per trovare la quota massima basta sostituire $t_{\max}$ nella legge oraria:

$$x_{\max} = x\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2.$$

Semplificando:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

L'altezza massima raggiunta dal corpo è

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

1.23.3 Istante di ritorno al suolo

Il corpo torna al suolo quando la sua posizione torna ad essere nulla:

$$x(t) = 0.$$

Quindi:

$$v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Raccogliendo t:

$$t\left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) = 0.$$

Le soluzioni sono:

$$t = 0 \qquad \text{oppure} \qquad v_0 - \frac{1}{2}gt = 0.$$

Da quest'ultima:

$$\frac{1}{2}gt = v_0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{2v_0}{g}.$$

Il tempo totale di volo del corpo è

$$t_g = \frac{2v_0}{g}.$$

Osservazione fisica. Nel modello senza attrito dell'aria, il moto di salita e quello di discesa sono simmetrici. Per questo motivo il tempo totale di volo è il doppio del tempo necessario per raggiungere la quota massima:

$$t_g = 2t_{\text{max}}.$$

1.23.4 Controllo dimensionale

Verifichiamo che la formula di t_{max} sia dimensionalmente corretta:

$$[t_{\text{max}}] = \frac{[v_0]}{[g]} = \frac{L\,T^{-1}}{L\,T^{-2}} = T.$$

Quindi il risultato ha effettivamente le dimensioni di un tempo.

Analogamente:

$$[t_g] = \frac{[v_0]}{[g]} = T.$$

Osservazione

Il controllo dimensionale è sempre utile: non prova da solo che una formula sia corretta, ma consente di escludere subito molte formule errate.

1.24 Moto armonico

Si chiama **moto armonico** un moto rettilineo periodico descritto da una legge oraria della forma

$$x(t) = A\sin(\omega t + \Phi),$$

dove:

- $A > 0$ è l'**ampiezza**;
- $\omega > 0$ è la **pulsazione**;
- Φ è la **fase iniziale**;
- T è il **periodo**;
- f è la **frequenza**.

Il punto materiale oscilla attorno alla posizione di equilibrio $x = 0$, rimanendo sempre compreso tra i valori estremi

$$-A \leq x(t) \leq A.$$

Interpretazione dei parametri.

- A rappresenta il massimo scostamento dall'equilibrio;
- Φ determina la condizione iniziale del moto;
- ω misura quanto rapidamente il moto evolve nel tempo.

1.24.1 Periodicità del moto armonico

Poiché la funzione seno è periodica di periodo 2π, vale:

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta.$$

Vogliamo determinare $T > 0$ tale che

$$x(t+T) = x(t) \qquad \text{per ogni } t.$$

Calcoliamo:

$$x(t+T) = A\sin\big(\omega(t+T) + \Phi\big) = A\sin(\omega t + \omega T + \Phi).$$

Affinché questa quantità coincida con

$$x(t) = A\sin(\omega t + \Phi),$$

deve valere:

$$\omega T = 2\pi.$$

Quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Nel moto armonico il periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

1.24.2 Frequenza e pulsazione

Per definizione, la frequenza è il numero di oscillazioni compiute nell'unità di tempo:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Poiché

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

segue che

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Equivalentemente:

$$\omega = 2\pi f.$$

Le relazioni fondamentali tra periodo, frequenza e pulsazione sono:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad f = \frac{1}{T}, \qquad \omega = 2\pi f.$$

1.24.3 Unità di misura

Le unità di misura delle principali grandezze del moto armonico sono:

$$[A] = L, \qquad [T] = T, \qquad [f] = T^{-1}, \qquad [\omega] = T^{-1}.$$

Nel Sistema Internazionale:

$$[A] = \mathrm{m}, \qquad [T] = \mathrm{s}, \qquad [f] = \mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}, \qquad [\omega] = \mathrm{rad/s}.$$

Osservazione

Formalmente il radiante è adimensionale, ma si scrive spesso rad/s per ricordare il significato fisico della pulsazione.

1.24.4 Velocità nel moto armonico

Partendo dalla legge oraria

$$x(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$

deriviamo rispetto al tempo:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \Phi).$$

1.24.5 Accelerazione nel moto armonico

Derivando nuovamente:

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \Phi).$$

Ma poiché

$$x(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$

si ottiene:

$$a(t) = -\omega^2 x(t).$$

Quindi il moto armonico soddisfa l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Nel moto armonico vale la relazione

$$a = -\omega^2 x,$$

ossia l'accelerazione è proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio ed è di verso opposto.

Interpretazione fisica fondamentale. L'accelerazione è sempre diretta verso il centro dell'oscillazione. Questo significa che il sistema tende continuamente a riportare il punto materiale verso la posizione di equilibrio $x = 0$. Per questo si parla di **forza di richiamo**.

1.24.6 Forma equivalente dell'equazione del moto

Poiché
$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$
portando tutto al primo membro si ottiene:
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Osservazione

Quando compare un'equazione del tipo
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$
siamo nel contesto del moto armonico, e la soluzione generale è della forma
$$x(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$$
oppure, equivalentemente,
$$x(t) = A\cos\big(\omega t + \Phi'\big).$$

1.24.7 Caso particolare: partenza dalla posizione estrema

Supponiamo di avere le condizioni iniziali
$$x(0) = x_0, \qquad v(0) = 0.$$

Cerchiamo una soluzione nella forma
$$x(t) = A\sin(\omega t + \Phi).$$

Imponendo $t = 0$, otteniamo:
$$x(0) = A\sin\Phi = x_0,$$
e inoltre
$$v(0) = A\omega\cos\Phi = 0.$$

Se $A \neq 0$ e $\omega \neq 0$, dalla seconda equazione segue:
$$\cos\Phi = 0.$$

Una scelta possibile è:
$$\Phi = \frac{\pi}{2}.$$

Sostituendo nella prima relazione:
$$x_0 = A\sin\frac{\pi}{2} = A.$$

Quindi:
$$A = x_0.$$

La legge oraria diventa allora
$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Usando l'identità

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta,$$

si ottiene:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

Se il moto armonico parte dalla posizione estrema con velocità iniziale nulla, allora la legge oraria può essere scritta come

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

Osservazione

La forma col seno e la forma col coseno descrivono lo stesso moto: cambia soltanto il modo in cui si incorpora la fase iniziale.

1.25 Accelerazione come funzione della posizione

In alcuni casi la velocità può essere considerata come funzione della posizione:

$$v = v(x).$$

Allora, applicando la regola della catena, si ha:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Poiché

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

segue che

$$a = v\frac{dv}{dx}.$$

Se la velocità è espressa come funzione della posizione, allora l'accelerazione può essere scritta nella forma

$$a = v\frac{dv}{dx}.$$

Moltiplicando ambo i membri per dx, otteniamo:

$$a\,dx = v\,dv.$$

Integrando tra x_0 e x, e tra v_0 e v, si ricava:

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv.$$

Il secondo integrale si calcola subito:

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

Quindi:

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

Osservazione. Questa formula è molto importante perché collega direttamente accelerazione, posizione e velocità senza passare esplicitamente dal tempo.

1.26 Sintesi finale sul moto armonico

Schema rapido da ripasso.

- legge oraria: $x(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$;
- periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$;
- frequenza: $f = \dfrac{1}{T}$;
- velocità: $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \Phi)$;
- accelerazione: $a(t) = -\omega^2 x(t)$;
- equazione differenziale: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$;
- interpretazione fisica: accelerazione di richiamo verso l'equilibrio.

1.27 Schema essenziale per l'orale

Lancio verticale.

- scelgo l'asse verticale orientato verso l'alto;
- scrivo le condizioni iniziali:

$$x(0) = 0, \qquad v(0) = v_0, \qquad a = -g;$$

- ricavo la legge oraria:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2;$$

- derivo:

$$v(t) = v_0 - gt;$$

- per l'altezza massima pongo $v(t) = 0$;
- per il ritorno al suolo pongo $x(t) = 0$.

Moto armonico.

- scrivo

$$x(t) = A \sin(\omega t + \Phi);$$

- uso la periodicità del seno per ricavare

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

- definisco la frequenza:

$$f = \frac{1}{T};$$

- derivo una volta e ottengo la velocità;
- derivo due volte e ottengo

$$\ddot{x} = -\omega^2 x;$$

- concludo che

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

1.28 Velocità come funzione della posizione nel moto uniformemente accelerato

Partiamo dalla relazione generale

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\, dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2.$$

Nel caso di **moto rettilineo uniformemente accelerato**, l'accelerazione è costante:

$$a(x) = a.$$

Allora il primo membro si semplifica immediatamente:

$$\int_{x_0}^{x} a\, dx = a \int_{x_0}^{x} dx = a(x - x_0).$$

Sostituendo nella relazione generale otteniamo

$$a(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

Moltiplicando per 2:

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2,$$

cioè

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Nel moto rettilineo uniformemente accelerato vale la relazione

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Osservazione

Questa formula è molto importante perché collega direttamente velocità e posizione, senza passare esplicitamente dal tempo.

1.28.1 Applicazione: caduta libera da fermo

Consideriamo un corpo lasciato cadere da un'altezza h, con asse verticale orientato verso l'alto. In questo sistema di riferimento:

$$a = -g, \qquad x_0 = h, \qquad v_0 = 0.$$

Sostituendo nella formula generale:

$$v^2 = 2(-g)(x - h).$$

Poiché

$$x - h = -(h - x),$$

si ottiene

$$v^2 = 2g(h - x).$$

Quindi

$$v(x) = \pm\sqrt{2g(h - x)}.$$

Nel caso della caduta verso il basso, la velocità è negativa rispetto all'asse scelto verso l'alto, quindi:

$$v(x) = -\sqrt{2g(h - x)}.$$

Per un corpo lasciato cadere da fermo da quota h, con asse verticale orientato verso l'alto, vale:

$$v(x) = -\sqrt{2g(h - x)}.$$

Interpretazione fisica. Quando il corpo si trova alla quota iniziale $x = h$, si ha

$$v(h) = 0.$$

Man mano che x diminuisce, la quantità $h - x$ aumenta, quindi aumenta il modulo della velocità.

1.28.2 Applicazione: lancio verticale con velocità iniziale non nulla

Se il corpo parte da una certa quota con velocità iniziale $v_0 \neq 0$, la stessa formula diventa:

$$v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Nel caso verticale con asse verso l'alto e accelerazione $a = -g$:

$$v^2(x) = v_0^2 - 2g(x - x_0).$$

Se scegliamo $x_0 = h$, otteniamo:

$$v^2(x) = v_0^2 + 2g(h - x),$$

da cui

$$v(x) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2g(h - x)}.$$

Osservazione

Il segno $+$ o $-$ non si sceglie in modo automatico: dipende dal verso del moto rispetto all'asse scelto.

1.28.3 Caso con origine nel suolo

Se l'origine dell'asse è nel suolo, cioè $h = 0$, allora la formula si scrive:

$$v^2(x) = v_0^2 - 2gx,$$

e quindi

$$v(x) = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gx}.$$

Lettura del segno.

- il segno $+$ corrisponde al moto verso l'alto;
- il segno $-$ corrisponde al moto verso il basso.

1.29 Velocità come funzione della posizione nel moto armonico semplice

Nel moto armonico semplice vale

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

ossia

$$a(x) = -\omega^2 x.$$

Usiamo ancora la relazione generale:

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

Sostituendo $a(x) = -\omega^2 x$, otteniamo:

$$-\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

Calcolando l'integrale:

$$-\omega^2 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_0}^{x} = -\omega^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2\right).$$

Quindi:

$$-\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2.$$

Riordinando:

$$v^2(x) = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2).$$

Nel moto armonico semplice la velocità in funzione della posizione può essere scritta come

$$v^2(x) = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2).$$

Osservazione

Questa formula mostra bene che, nel moto armonico, la velocità dipende dalla posizione: è massima in prossimità dell'equilibrio $x = 0$ e si annulla nelle posizioni estreme.

1.30 Moto curvilineo e ascissa curvilinea

Passiamo ora al caso generale di un moto nello spazio.

La posizione del punto materiale si descrive mediante il vettore posizione

$$\vec{r} = x\,\hat{u}_x + y\,\hat{u}_y + z\,\hat{u}_z.$$

Le coordinate x, y, z sono in generale funzioni del tempo:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Quindi

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y + z(t)\,\hat{u}_z.$$

Il **vettore velocità** è definito come

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Derivando in componenti:

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (v_x, v_y, v_z).$$

Quindi:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Integrando nel tempo si ottiene formalmente:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)\,d\tau.$$

In componenti:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)\,d\tau,$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y(\tau)\,d\tau,$$

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z(\tau)\,d\tau.$$

Analogamente, per l'accelerazione:

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^{t} a_x(\tau)\, d\tau,$$

$$v_y(t) = v_{y0} + \int_{t_0}^{t} a_y(\tau)\, d\tau,$$

$$v_z(t) = v_{z0} + \int_{t_0}^{t} a_z(\tau)\, d\tau.$$

1.30.1 Ascissa curvilinea

Se il punto si muove lungo una traiettoria qualsiasi, conviene descrivere la sua posizione lungo la curva mediante l'**ascissa curvilinea** s.

L'incremento infinitesimo del vettore posizione lungo la traiettoria è

$$d\vec{r} = ds\, \hat{u}_T,$$

dove $\hat{u}_T$ è il versore tangente alla traiettoria.

La velocità può essere scritta nella forma

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\, \hat{u}_T = v\, \hat{u}_T,$$

dove

$$v = \frac{ds}{dt}$$

è il modulo della velocità.

Osservazione fondamentale. Nel moto curvilineo il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria.

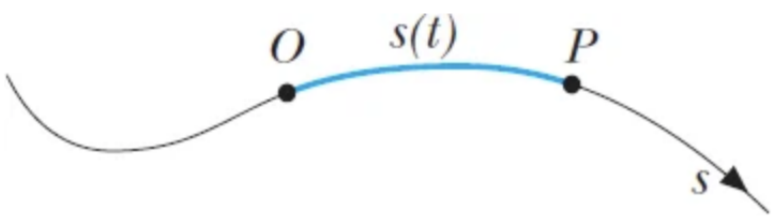

Figura 15: Ascissa curvilinea del punto P (O è l'origine fissata sulla traiettoria).

1.31 Accelerazione tangenziale e accelerazione normale

Partiamo da

$$\vec{v} = v\, \hat{u}_T.$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\, \hat{u}_T).$$

Applicando la regola del prodotto:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + v\,\frac{d\hat{u}_T}{dt}.$$

Poiché il versore tangente cambia direzione lungo la traiettoria, la sua derivata è diretta lungo il versore normale $\hat{u}_N$. Si può quindi scrivere:

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_N.$$

Sostituendo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + v\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_N.$$

L'accelerazione nel moto curvilineo si scompone come

$$\vec{a} = a_T\,\hat{u}_T + a_N\,\hat{u}_N,$$

dove

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \qquad a_N = v\,\frac{d\theta}{dt}.$$

1.31.1 Perché il contributo normale è perpendicolare alla velocità

Il versore tangente ha modulo unitario, quindi:

$$\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T = 1.$$

Derivando:

$$\frac{d}{dt}(\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T) = 0.$$

Applicando la regola di derivazione del prodotto scalare:

$$2\,\hat{u}_T \cdot \frac{d\hat{u}_T}{dt} = 0.$$

Dunque:

$$\hat{u}_T \cdot \frac{d\hat{u}_T}{dt} = 0.$$

Questo mostra che

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

è perpendicolare a $\hat{u}_T$, cioè diretto lungo la normale alla traiettoria.

Osservazione

Per l'orale è importante sottolineare la differenza:

- il termine tangenziale $\frac{dv}{dt}\hat{u}_T$ cambia il **modulo** della velocità;
- il termine normale $v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_N$ cambia la **direzione** della velocità.

1.31.2 Raggio di curvatura

Vale la relazione geometrica

$$ds = R\,d\theta,$$

dove R è il raggio di curvatura della traiettoria.

Da essa segue:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}.$$

Moltiplicando per $\frac{ds}{dt} = v$, otteniamo:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v.$$

Sostituendo nella formula dell'accelerazione normale:

$$a_N = v\frac{d\theta}{dt} = v \cdot \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

Quindi la scomposizione finale dell'accelerazione è:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N.$$

Nel moto curvilineo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N.$$

Interpretazione fisica.

- $\frac{dv}{dt}$ è l'**accelerazione tangenziale**: misura quanto cambia rapidamente il modulo della velocità;
- $\frac{v^2}{R}$ è l'**accelerazione normale** o **centripeta**: misura quanto rapidamente cambia la direzione della velocità.

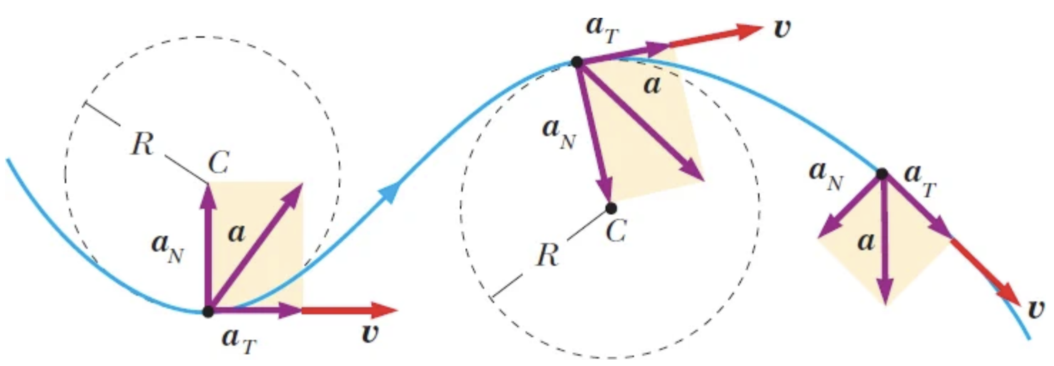

Figura 16: Componenti dell'accelerazione di un punto lungo una traiettoria.

1.32 Sistema di riferimento inerziale

Un **sistema di riferimento inerziale** è un sistema di riferimento fisso, oppure in moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento fisso.

Osservazione

Questa nozione sarà fondamentale quando passeremo dalla cinematica alla dinamica, cioè allo studio delle cause del moto.

1.33 Moto circolare

Consideriamo un punto materiale che si muove su una circonferenza di raggio R. La sua posizione può essere individuata mediante l'angolo $\theta = \theta(t)$ formato dal raggio vettore con un asse di riferimento.

Se in due istanti t_1 e t_2 il punto si trova rispettivamente nelle posizioni angolari θ_1 e θ_2, definiamo lo spostamento angolare

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

La **velocità angolare media** è definita da

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Osservazione

L'angolo θ si misura in radianti. Di conseguenza, nel Sistema Internazionale la velocità angolare si misura in

$$\mathrm{rad/s}.$$

Poiché il radiante è adimensionale, dimensionalmente si ha

$$[\omega] = T^{-1}.$$

1.33.1 Coordinate cartesiane del punto

Se il centro della circonferenza coincide con l'origine del sistema di riferimento, le coordinate del punto sono

$$x(t) = R\cos\theta(t), \qquad y(t) = R\sin\theta(t).$$

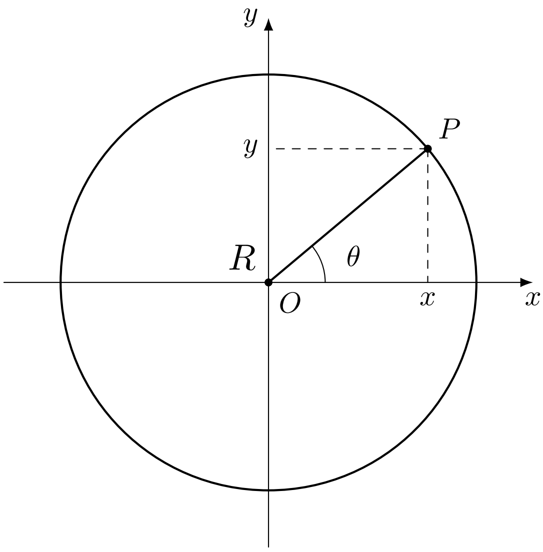

Figura 17: Posizione di un punto in moto circolare.

1.33.2 Velocità angolare istantanea

Passando al limite per $\Delta t \to 0$, si ottiene la velocità angolare istantanea.

La **velocità angolare istantanea** è

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

1.33.3 Relazione tra ascissa curvilinea e angolo

Nel moto circolare l'ascissa curvilinea s misurata lungo la circonferenza è legata all'angolo dalla relazione

$$s(t) = R\theta(t).$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}.$$

Poiché $\dfrac{ds}{dt} = v$ e $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$, segue immediatamente che

$$v = R\omega.$$

Nel moto circolare vale la relazione fondamentale

$$v = R\omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega = \frac{v}{R}.$$

Questa formula esprime il legame tra la descrizione lineare del moto lungo la traiettoria e la descrizione angolare del moto attorno al centro.

1.33.4 Legge oraria angolare

Poiché
$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$
integrando tra t_0 e t si ottiene
$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, d\tau,$$
da cui
$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, d\tau.$$

Se ω è costante, allora
$$\theta(t) - \theta_0 = \omega(t - t_0),$$
ossia
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0).$$

1.33.5 Moto circolare uniforme

Si ha **moto circolare uniforme** quando il punto materiale si muove su una circonferenza con velocità angolare costante:
$$\omega = \text{costante}.$$

In questo caso il modulo della velocità resta costante, quindi
$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Pertanto, nella scomposizione generale dell'accelerazione
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N,$$
il termine tangenziale si annulla e rimane soltanto il contributo normale:
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N.$$

Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è puramente **normale** (o **centripeta**):
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N.$$

Usando la relazione $v = R\omega$, si ottiene anche
$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R.$$

Nel moto circolare uniforme
$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

Osservazione

L'accelerazione centripeta non modifica il modulo della velocità, ma soltanto la sua direzione. Per questo motivo, anche se il moto è uniforme, l'accelerazione non è nulla.

1.33.6 Periodo e frequenza

Se il punto compie un giro completo in un tempo T, allora l'angolo descritto è 2π. Poiché nel moto circolare uniforme ω è costante, vale
$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Di conseguenza,
$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Poiché la frequenza è definita da
$$f = \frac{1}{T},$$
segue anche
$$\omega = 2\pi f.$$

Nel moto circolare uniforme valgono le relazioni
$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \omega = 2\pi f.$$

1.33.7 Moto circolare non uniforme

Se la velocità angolare non è costante, il moto circolare è detto **non uniforme**.
$$\omega \neq \text{costante}.$$

In questo caso il modulo della velocità varia nel tempo, quindi compare anche una componente tangenziale dell'accelerazione.

Nel moto circolare non uniforme l'accelerazione ha in generale due contributi:
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N.$$

Il primo termine è l'accelerazione tangenziale, il secondo è l'accelerazione normale o centripeta.

1.33.8 Accelerazione angolare

In modo del tutto analogo a quanto fatto per la velocità angolare, introduciamo l'accelerazione angolare media.

> L'**accelerazione angolare media** è
> $$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Passando al limite si ottiene l'accelerazione angolare istantanea:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Poiché $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, segue anche

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Inoltre, dalla relazione $v = R\omega$, derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha,$$

cioè

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}.$$

> L'accelerazione angolare può essere scritta nelle forme equivalenti
> $$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}.$$

1.33.9 Leggi integrali

Poiché

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

integrando si ricava

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau.$$

Moltiplicando per R, si ottiene anche

$$v(t) = v_0 + R\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\, d\tau.$$

Inoltre, essendo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

segue

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, d\tau.$$

1.33.10 Moto circolare uniformemente accelerato

Si ha **moto circolare uniformemente accelerato** quando

$$\alpha = \text{costante}.$$

Integrando:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0).$$

Poi:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \big[\omega_0 + \alpha(\tau - t_0)\big]\, d\tau,$$

da cui

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2.$$

Nel moto circolare uniformemente accelerato:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0),$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2.$$

1.33.11 Relazione tra velocità angolare e posizione angolare

Poiché

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

applicando la regola della catena otteniamo

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}.$$

Quindi

$$\alpha(\theta) = \omega\frac{d\omega}{d\theta}.$$

Moltiplicando per $d\theta$:

$$\alpha(\theta)\, d\theta = \omega\, d\omega.$$

Integrando tra θ_0 e θ, e tra ω_0 e ω, si ottiene

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\varphi)\, d\varphi = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2).$$

Nel moto circolare vale

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\varphi)\, d\varphi.$$

Nel caso particolare in cui α sia costante, si ottiene

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0).$$

1.34 Formulazione vettoriale del moto circolare

Nel moto circolare è utile introdurre il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$, diretto lungo l'asse di rotazione secondo la regola della mano destra.

La velocità del punto può essere scritta come

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Usando la regola di derivazione del prodotto vettoriale, si ottiene

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Poiché

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \qquad \text{e} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v},$$

segue

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Nel moto circolare:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Il primo termine rappresenta l'accelerazione tangenziale, il secondo l'accelerazione normale.

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}, \qquad \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Per i moduli si ottiene:

$$|\vec{a}_T| = \alpha R, \qquad |\vec{a}_N| = \omega^2 R.$$

Questa formulazione vettoriale è perfettamente coerente con quella scalare già ottenuta:

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \qquad a_N = \frac{v^2}{R}.$$

Infatti, usando $v = \omega R$, si ha

$$a_N = \omega^2 R = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

1.35 Moto parabolico

Consideriamo ora un punto materiale lanciato nel piano con velocità iniziale $\vec{v}_0$, formando un angolo θ con l'orizzontale.

Scegliamo: - asse x orizzontale; - asse y verticale orientato verso l'alto; - accelerazione di gravità costante

$$\vec{a} = -g\,\hat{u}_y.$$

La velocità iniziale si scompone come

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\theta\,\hat{u}_x + v_0 \sin\theta\,\hat{u}_y.$$

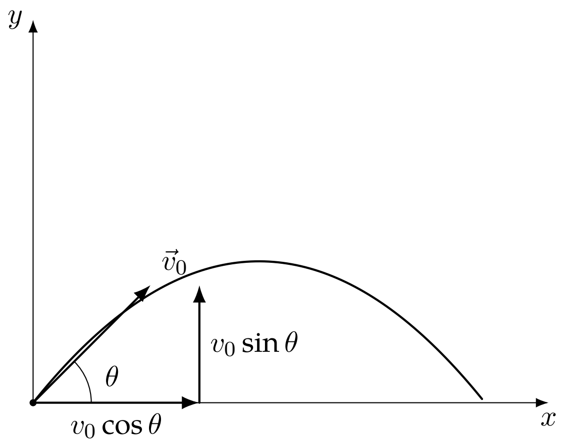

Figura 18: Moto parabolico: scomposizione della velocità iniziale.

1.35.1 Velocità nel moto parabolico

Poiché

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(\tau)\,d\tau,$$

e $\vec{a}(\tau) = -g\,\hat{u}_y$, otteniamo

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\,\hat{u}_y.$$

Sostituendo la scomposizione di $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos\theta\,\hat{u}_x + \big(v_0 \sin\theta - gt\big)\hat{u}_y.$$

Quindi

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta, \qquad v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt.$$

Osservazione

Nel moto parabolico la componente orizzontale della velocità resta costante, mentre la componente verticale varia linearmente nel tempo a causa della gravità.

1.35.2 Legge oraria

Integrando le componenti della velocità si ottiene:

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t,$$

$$y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

La legge oraria del moto parabolico è:

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t, \qquad y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

1.35.3 Equazione della traiettoria

Dalla prima equazione ricaviamo

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}.$$

Sostituendo nella seconda:

$$y(x) = v_0 \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2.$$

Semplificando:

$$y(x) = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}.$$

L'equazione della traiettoria è

$$y(x) = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}.$$

Poiché $y(x)$ è un polinomio di secondo grado in x, la traiettoria è una **parabola**. Da qui il nome di **moto parabolico**.

1.35.4 Gittata

La gittata è la distanza orizzontale percorsa dal punto fino al ritorno al suolo, cioè fino a quando $y = 0$.

Poniamo quindi:

$$y(x) = 0.$$

Si ottiene

$$x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} = 0.$$

Raccogliendo x:

$$x\left(\tan\theta - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\theta}\right) = 0.$$

Una soluzione è $x = 0$, che corrisponde al punto di lancio. L'altra è

$$x = \frac{2v_0^2\cos^2\theta\tan\theta}{g}.$$

Usando l'identità

$$2\cos^2\theta\tan\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta,$$

segue

$$G = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}.$$

La gittata del moto parabolico è

$$G = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}.$$

1.35.5 Ascissa del punto più alto

Il punto più alto della traiettoria si ottiene imponendo

$$y'(x) = 0.$$

Poiché

$$y(x) = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta},$$

si ha

$$y'(x) = \tan\theta - \frac{g}{v_0^2\cos^2\theta}x.$$

Ponendo $y'(x) = 0$, si ottiene

$$x_{\text{max}} = \frac{v_0^2\cos^2\theta\tan\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}.$$

L'ascissa del punto più alto della traiettoria è

$$x_{\text{max}} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}.$$

Osservazione

Come è naturale aspettarsi, il punto più alto si trova a metà della gittata:

$$x_{\text{max}} = \frac{G}{2}.$$

1.36 Passaggio dalla cinematica alla dinamica

La **cinematica** descrive il moto; la **dinamica** studia invece le *cause* del moto.

La **dinamica del punto materiale** studia le leggi che determinano il moto di un punto materiale.

Quando un punto materiale modifica il proprio stato di moto, diciamo che esso è soggetto all'azione di una o più **forze**.

Osservazione

All'orale conviene chiarire subito che, in dinamica, la domanda fondamentale non è più:

"come si muove il corpo?"

bensì:

"perché il corpo si muove in quel modo?"

1.37 Primo principio della dinamica

Il **principio di inerzia** afferma che un corpo non soggetto a forze permane nel proprio stato di quiete oppure di moto rettilineo uniforme, rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

In formule, se la risultante delle forze è nulla,

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{0},$$

allora l'accelerazione è nulla:

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

Di conseguenza:

$$\vec{v} = \text{costante} \qquad \text{oppure} \qquad \vec{v} = \vec{0}.$$

Interpretazione fisica. Il moto rettilineo uniforme non ha bisogno di una forza che lo "mantenga": è la variazione dello stato di moto che richiede una forza risultante non nulla.

1.38 Secondo principio della dinamica

Il **secondo principio della dinamica** afferma che la forza totale agente su un punto materiale è uguale al prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione che esso subisce:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}.$$

Osservazione

La massa misura l'**inerzia** del corpo, cioè la resistenza che esso oppone alla variazione del proprio stato di moto.

Se la massa è costante, si può anche scrivere formalmente

$$m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$$

quando forza e accelerazione sono parallele, ma il significato fisico corretto resta quello di coefficiente di proporzionalità tra forza risultante e accelerazione.

Per l'orale. La relazione $\vec{F} = m\vec{a}$ è vettoriale: ciò significa che forza risultante e accelerazione hanno la stessa direzione e lo stesso verso.

1.39 Terzo principio della dinamica

Il **terzo principio della dinamica** afferma che, se un punto materiale A esercita una forza su un punto materiale B, allora B esercita su A una forza uguale in modulo e opposta in verso:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}.$$

Osservazione

Le due forze di azione e reazione:

- hanno uguale intensità;
- hanno la stessa direzione;
- hanno versi opposti;
- agiscono però su **corpi diversi**.

Per questo motivo non si annullano tra loro.

1.40 Quantità di moto

La **quantità di moto** di un punto materiale è definita come

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Se la massa è costante, allora

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Usando il secondo principio della dinamica, otteniamo:

La forza risultante agente su un punto materiale è uguale alla derivata temporale della quantità di moto:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Questa formulazione è più generale della scrittura $\vec{F} = m\vec{a}$, ed è particolarmente importante quando la massa non può essere considerata costante.

1.41 Impulso di una forza

Partiamo da
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$
Moltiplicando per dt, otteniamo
$$d\vec{p} = \vec{F}\,dt.$$

Integrando tra t_0 e t:
$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(\tau)\,d\tau.$$

L'**impulso** della forza risultante nell'intervallo $[t_0, t]$ è definito da
$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(\tau)\,d\tau.$$

Poiché
$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0,$$
segue la relazione fondamentale:

L'impulso della forza risultante è uguale alla variazione della quantità di moto:
$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0.$$

Se la forza risultante è costante, allora
$$\vec{J} = \vec{F}(t - t_0).$$

Osservazione. L'impulso misura l'effetto complessivo di una forza nell'intervallo di tempo in cui essa agisce.

1.42 Conservazione della quantità di moto

Se la risultante delle forze esterne è nulla, allora
$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{0}.$$
Di conseguenza,
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0},$$
e quindi la quantità di moto resta costante.

Se la forza risultante agente su un punto materiale è nulla, allora la quantità di moto si conserva:
$$\vec{p} = \vec{p}_0.$$

1.43 Unità di misura della forza

Dal secondo principio della dinamica,

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

segue dimensionalmente:

$$[F] = [m][L][T]^{-2}.$$

Nel Sistema Internazionale:

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}.$$

Osservazione

Il newton è l'unità di misura della forza nel Sistema Internazionale.

1.44 Equilibrio di più forze

Un punto materiale è in equilibrio se la risultante di tutte le forze applicate è nulla:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Poiché

$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a},$$

segue che in equilibrio

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

In componenti cartesiane:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

Le condizioni di equilibrio in un sistema cartesiano tridimensionale sono

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \\ \sum F_y = 0, \\ \sum F_z = 0. \end{cases}$$

1.45 Scomposizione della forza nel moto curvilineo

Poiché nel moto curvilineo

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N,$$

dal secondo principio della dinamica segue immediatamente:

Nel moto curvilineo la forza risultante si scompone come

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + m\frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N.$$

Si introducono allora:

$$\vec{F}_T = m\frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T, \qquad \vec{F}_N = m\frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N.$$

Interpretazione fisica.

- La **forza tangenziale** modifica il modulo della velocità.
- La **forza normale** modifica la direzione della velocità.

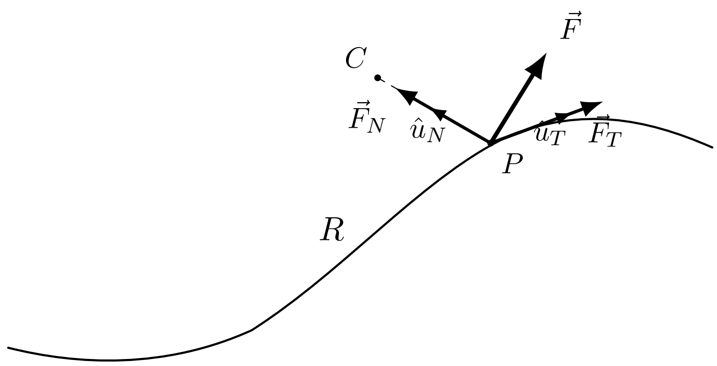

Figura 19: Scomposizione della forza risultante nei contributi tangenziale e normale.

1.46 Forza peso

La **forza peso** di un punto materiale di massa m è la forza gravitazionale esercitata dalla Terra sul corpo ed è data da

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Se scegliamo l'asse verticale orientato verso l'alto, allora

$$\vec{g} = -g\,\hat{u}_z,$$

e quindi

$$\vec{P} = m(-g)\hat{u}_z = -mg\,\hat{u}_z.$$

Osservazione

Il peso è sempre diretto verticalmente verso il basso, indipendentemente dal moto del corpo.

1.47 Reazione vincolare su un piano orizzontale

Consideriamo un corpo appoggiato su un piano orizzontale.

La **reazione vincolare normale** è la forza esercitata dal vincolo sul corpo, perpendicolare alla superficie di contatto.

Se il piano è orizzontale e l'asse z è verticale verso l'alto, possiamo scrivere

$$\vec{N} = N\,\hat{u}_z.$$

Le forze verticali agenti sul corpo sono allora:

$$\vec{P} = -mg\,\hat{u}_z, \qquad \vec{N} = N\,\hat{u}_z.$$

Se il corpo è in equilibrio verticale,

$$\vec{N} + \vec{P} = \vec{0},$$

da cui

$$N = mg.$$

Per un corpo in quiete su un piano orizzontale:

$$N = mg.$$

1.48 Il caso dell'ascensore

Supponiamo che una persona di massa m si trovi in un ascensore che si muove verticalmente.

Le forze agenti sono:

$$\vec{N} = N\,\hat{u}_z, \qquad \vec{P} = -mg\,\hat{u}_z.$$

La seconda legge della dinamica dà:

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}.$$

1. Ascensore fermo o in moto rettilineo uniforme

In questo caso

$$\vec{a} = \vec{0},$$

quindi

$$\vec{N} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad N = mg.$$

2. Ascensore accelerato verso l'alto

Se

$$\vec{a} = a\,\hat{u}_z,$$

allora

$$N\hat{u}_z - mg\hat{u}_z = ma\hat{u}_z,$$

e dunque

$$N = m(g + a).$$

3. Ascensore accelerato verso il basso

Se

$$\vec{a} = -a\,\hat{u}_z,$$

allora

$$N\hat{u}_z - mg\hat{u}_z = -ma\hat{u}_z,$$

da cui

$$N = m(g - a).$$

Lettura fisica.

- Se l'ascensore accelera verso l'alto, la reazione vincolare aumenta: il corpo si sente **più pesante**.
- Se l'ascensore accelera verso il basso, la reazione vincolare diminuisce: il corpo si sente **più leggero**.

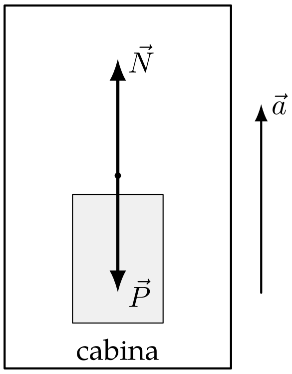

Figura 20: Forze agenti su un corpo in un ascensore accelerato verso l'alto.

1.49 Forza di attrito

L'attrito nasce quando due superfici sono a contatto e tende a opporsi al moto relativo o alla sua insorgenza.

1.49.1 Attrito statico

La **forza di attrito statico** è la forza che si oppone all'inizio del moto tra due superfici a contatto.

Il suo modulo soddisfa la disuguaglianza

$$F_{as} \leq \mu_s N,$$

dove:

- μ_s è il coefficiente di attrito statico;
- N è il modulo della reazione vincolare normale.

Il valore massimo è

$$F_{as,\max} = \mu_s N.$$

L'attrito statico non ha modulo fissato a priori: esso si adatta al valore necessario per mantenere l'equilibrio, fino al massimo $\mu_s N$.

1.49.2 Attrito dinamico

Quando il corpo è in moto, agisce la **forza di attrito dinamico**, il cui modulo vale

$$F_{ad} = \mu_d N,$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico.

La sua direzione è tangente alla superficie di contatto e il suo verso è opposto a quello della velocità relativa.

$$\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \, \hat{u}_v$$

se $\hat{u}_v$ è il versore della velocità lungo il piano.

Osservazione

In genere vale

$$\mu_d < \mu_s,$$

cioè mantenere il moto è più facile che vincere l'attrito statico iniziale.

1.50 Equilibrio di un corpo su un piano orizzontale con forza obliqua

Consideriamo un corpo di massa m, appoggiato su un piano orizzontale scabro, soggetto:

- alla forza peso $\vec{P}$,
- alla reazione vincolare $\vec{N}$,
- alla forza di attrito statico $\vec{F}_{as}$,
- a una forza esterna $\vec{F}$ diretta verso sinistra e inclinata di un angolo θ rispetto all'asse x.

Poiché il corpo è fermo, la risultante delle forze è nulla:

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0},$$

dove $\vec{R}$ rappresenta la risultante di reazione del piano, con componente normale e componente tangenziale.

Scomponiamo $\vec{F}$:

$$F_x = -F\cos\theta, \qquad F_y = F\sin\theta.$$

Equilibrio lungo y

Lungo l'asse verticale:

$$N + F\sin\theta - mg = 0,$$

da cui

$$N = mg - F\sin\theta.$$

Equilibrio lungo x

L'attrito statico si oppone alla tendenza al moto verso sinistra, quindi agisce verso destra. In condizioni limite:

$$F_{as,\text{max}} = \mu_s N.$$

La condizione di equilibrio orizzontale al limite dell'aderenza è

$$F \cos\theta = \mu_s N.$$

Sostituendo N:

$$F \cos\theta = \mu_s (mg - F \sin\theta).$$

Sviluppando:

$$F \cos\theta = \mu_s mg - \mu_s F \sin\theta.$$

Portando i termini in F allo stesso membro:

$$F(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) = \mu_s mg.$$

Quindi:

La massima forza F applicabile mantenendo il corpo in equilibrio è

$$F = \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}.$$

Osservazione importante. Questa formula ha senso solo finché il corpo rimane in quiete. Se F supera tale valore, l'attrito statico non è più sufficiente e il corpo si mette in moto.

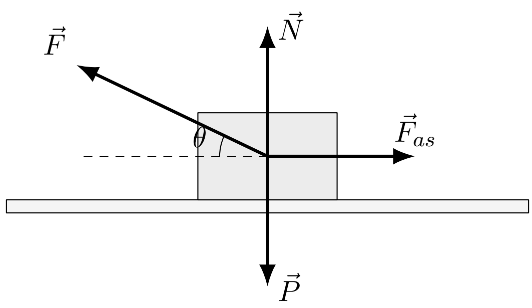

Figura 21: Corpo su piano orizzontale scabro soggetto a una forza obliqua e all'attrito statico.

1.51 Schema essenziale per l'orale

Nodi concettuali da saper spiegare bene.

- differenza tra cinematica e dinamica;
- significato dei tre principi di Newton;
- relazione tra forza risultante e variazione della quantità di moto;
- significato fisico di impulso;
- equilibrio come annullamento della risultante;
- scomposizione della forza nel moto curvilineo;
- distinzione tra peso, reazione vincolare e attrito;
- differenza tra attrito statico e attrito dinamico;
- interpretazione della reazione vincolare nel caso dell'ascensore.

Esercizio guidato 1: determinazione di una terza forza di equilibrio

Esercizio 1.5. Un punto materiale è soggetto a due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Determinare una terza forza $\vec{F}_3$ affinché il punto sia in equilibrio.

La condizione di equilibrio è

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}.$$

Quindi

$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2).$$

Metodo operativo.

1. si scompongono $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ nelle componenti cartesiane;
2. si sommano le componenti lungo ciascun asse;
3. si cambia segno al vettore risultante ottenuto.

In componenti:

$$F_{3x} = -(F_{1x} + F_{2x}), \qquad F_{3y} = -(F_{1y} + F_{2y}).$$