Appunti di Geometria

Secondo Semestre

Anno 2025/26 • Prof. DI GENNARO VINCENZO

Diego Marini
diego@marini.work | marini.work

Ultimo aggiornamento: 3 marzo 2026

Nota: appunti personali in continuo aggiornamento. Possibili errori: segnalazioni benvenute.

Indice

1 Strutture algebriche e Spazi vettoriali

1.1 Notazione e convenzioni

Nel seguito adotteremo le seguenti convenzioni.

- I vettori si indicano con lettere minuscole sottolineate:
$$\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w},\dots$$
e appartengono a un insieme V.
- I numeri si indicano con lettere minuscole dell'alfabeto:
$$a,\ b,\ c,\dots$$
e, in questa fase, li consideriamo numeri reali.
- La somma tra vettori si indica con il simbolo usuale $+$:
$$\underline{u}+\underline{v}.$$
- Il prodotto tra un numero e un vettore si indica per semplice giustapposizione:
$$a\underline{u}.$$
- Il vettore nullo si indica con $\underline{0}$ ed è tale che
$$\underline{u}+\underline{0}=\underline{u}.$$
- L'opposto di $\underline{u}$ si indica con $-\underline{u}$ ed è definito da
$$\underline{u}+(-\underline{u})=\underline{0}.$$

1.2 Operazioni su un insieme

Per costruire una struttura algebrica su un insieme è necessario definire una o più operazioni che permettano di combinare tra loro gli elementi dell'insieme.

Un'operazione è una legge che associa a uno o più elementi un nuovo elemento.

Nel caso degli spazi vettoriali (ovvero una struttura algebrica con determinate caratteristiche) compaiono due tipi di operazioni:

- operazione interna
- operazione esterna

1.2.1 Operazione interna

Sia V un insieme. Si chiama **operazione interna** su V una funzione
$$*: V\times V\longrightarrow V$$
che associa ad ogni coppia $(\underline{u},\underline{v})$ un elemento
$$\underline{u}*\underline{v}\in V.$$

Un'operazione è detta interna perché combina due elementi di V e restituisce ancora un elemento di V.

Esempio. La somma tra vettori

$$\underline{u} + \underline{v}$$

è un'operazione interna se il risultato appartiene ancora a V.

Osservazione. Affinché una legge sia un'operazione interna deve valere la proprietà di *chiusura*: il risultato deve appartenere allo stesso insieme di partenza.

1.2.2 Operazione esterna

Negli spazi vettoriali interviene una seconda operazione, che combina un numero con un vettore.

Sia V un insieme di vettori. Si chiama **operazione esterna** una funzione

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

che ad ogni coppia $(a, \underline{u})$ associa un vettore

$$a\underline{u} \in V.$$

L'operazione è detta esterna perché combina elementi di due insiemi diversi: numeri reali e vettori.

Esempio. Se $V = \mathbb{R}^2$ e $\underline{u} = (x, y)$, allora

$$a\underline{u} = (ax, ay).$$

Il risultato appartiene ancora a $\mathbb{R}^2$.

1.3 Definizione di spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica munita di:

- una somma tra vettori (operazione interna),
- un prodotto tra numero reale e vettore (operazione esterna),

che soddisfano determinate regole di calcolo (sono 8).

1.3.1 Assiomi (regole di calcolo)

Siano $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

1. **Proprietà associativa della somma**

$$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$$

2. **Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma** Esiste $\underline{0} \in V$ tale che

$$\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$$

3. **Esistenza dell'opposto rispetto alla somma** Per ogni $\underline{u} \in V$ esiste $-\underline{u} \in V$ tale che

$$\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$$

4. **Proprietà commutativa della somma**

$$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$$

5. **Proprietà associativa del prodotto per numero**

$$a(b\underline{u}) = (ab)\underline{u}$$

6. **Elemento neutro del prodotto per numero**

$$1\underline{u} = \underline{u}$$

7. **Proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori**

$$a(\underline{u} + \underline{v}) = a\underline{u} + a\underline{v}$$

8. **Proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri**

$$(a + b)\underline{u} = a\underline{u} + b\underline{u}$$

Esercizio 1.1 (Uso delle regole di calcolo)**.** Siano $\underline{u}, \underline{v} \in V$. Semplificare l'espressione

$$E = 5\underline{u} + 3\underline{v} + 2\underline{u}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che

$$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \quad \text{(assioma 4)}.$$

$$E = 5\underline{u} + 3\underline{v} + 2\underline{u} = 5\underline{u} + 2\underline{u} + 3\underline{v}$$

Applichiamo la distributività (assioma 8):

$$= (5 + 2)\underline{u} + 3\underline{v} = 7\underline{u} + 3\underline{v}.$$

Osservazione 1.2. L'insieme $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con le operazioni usuali è uno spazio vettoriale.

Consideriamo invece l'operazione definita su $\mathbb{R}$ da

$$x \oplus y = x + 2y.$$

Allora $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ non è uno spazio vettoriale, poiché l'operazione $\oplus$ non è associativa. Infatti, ad esempio:

$$(1 \oplus 1) \oplus 1 = (1 + 2) \oplus 1 = 3 \oplus 1 = 5,$$

$$1 \oplus (1 \oplus 1) = 1 \oplus (1 + 2) = 1 \oplus 3 = 1 + 6 = 7.$$

Poiché i due risultati sono diversi, l'operazione $\oplus$ non è associativa.

1.4 Proprietà di calcolo in uno spazio vettoriale

Dagli assiomi si deducono le seguenti proprietà fondamentali.

Siano $a \in \mathbb{R}$ e $\underline{u}, \underline{v} \in V$.

1. **Unicità del vettore nullo**

   Il vettore nullo è unico.

2. **Unicità dell'opposto**

   Per ogni $\underline{u} \in V$ l'opposto è unico.

3. **Prodotto di un numero per il vettore nullo**

$$a\underline{0} = \underline{0}.$$

4. **Prodotto dello zero per un vettore**

$$0\underline{u} = \underline{0}.$$

5. **Legge di annullamento del prodotto**

$$a\underline{u} = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \text{ oppure } \underline{u} = \underline{0}.$$

6. **Regole dei segni**

$$(-a)\underline{u} = -(a\underline{u}) = a(-\underline{u}),$$

$$(-a)(-\underline{u}) = a\underline{u}.$$

7. **Equazione lineare in V**

   Per ogni $a \neq 0$ e per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esiste un unico vettore $\underline{x} \in V$ tale che

$$a\underline{x} + \underline{u} = \underline{v} \qquad \text{(equazione di primo grado in } V\text{)}$$

   Tale vettore è dato da

$$\underline{x} = \frac{1}{a}(\underline{v} - \underline{u}).$$

1.5 Dimostrazioni delle proprietà di calcolo

1) Unicità del vettore nullo. Se $\underline{0}, \underline{0}' \in V$ sono vettori nulli, allora

$$\underline{0} = \underline{0}'.$$

Dimostrazione. Siano $\underline{0}, \underline{0}' \in V$ due vettori nulli.

Poiché $\underline{0}$ è vettore nullo,

$$\underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}'.$$

Poiché $\underline{0}'$ è vettore nullo,

$$\underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}.$$

Ne segue che

$$\underline{0}' = \underline{0}.$$

□

2) Unicità dell'opposto. Sia $\underline{u} \in V$. Se esistono $\underline{w}, \underline{w}' \in V$ tali che

$$\begin{cases} \underline{u} + \underline{w} = \underline{0} \\ \underline{u} + \underline{w}' = \underline{0} \end{cases} \implies \underline{w} = \underline{w}'.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \underline{w} + \underline{0} \\ &= \underline{w} + (\underline{u} + \underline{w}') \\ &= (\underline{w} + \underline{u}) + \underline{w}' \quad \text{(associatività)} \\ &= \underline{0} + \underline{w}' \\ &= \underline{w}'. \end{aligned}$$

□

Osservazione.

$$-\underline{0} = \underline{0}.$$

Infatti $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, quindi il vettore nullo coincide con il proprio opposto.

3) $a \cdot \underline{0} = \underline{0}$

Dimostrazione. Poiché $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$, si ha

$$a\underline{0} = a(\underline{0} + \underline{0}).$$

Per la proprietà distributiva,

$$a\underline{0} = a\underline{0} + a\underline{0}.$$

Sommiamo l'opposto di $a\underline{0}$ a entrambi i membri:

$$a\underline{0} + (-a\underline{0}) = (a\underline{0} + a\underline{0}) + (-a\underline{0}).$$

Per associatività della somma,

$$\underline{0} = a\underline{0} + (a\underline{0} + (-a\underline{0})).$$

Poiché $a\underline{0} + (-a\underline{0}) = \underline{0}$, segue

$$\underline{0} = a\underline{0} + \underline{0}.$$

Quindi

$$\underline{0} = a\underline{0}.$$

□

4) $0\underline{u} = \underline{0}$

Dimostrazione. Poiché $0 = 0 + 0$, si ha

$$0\underline{u} = (0 + 0)\underline{u}.$$

Per la proprietà distributiva,

$$(0 + 0)\underline{u} = 0\underline{u} + 0\underline{u}.$$

Quindi

$$0\underline{u} = 0\underline{u} + 0\underline{u}.$$

Sommiamo l'opposto di $0\underline{u}$ a entrambi i membri:

$$0\underline{u} + (-(0\underline{u})) = (0\underline{u} + 0\underline{u}) + (-(0\underline{u})).$$

Per associatività della somma,

$$\underline{0} = 0\underline{u} + (0\underline{u} + (-(0\underline{u}))).$$

Poiché $0\underline{u} + (-(0\underline{u})) = \underline{0}$, segue

$$\underline{0} = 0\underline{u} + \underline{0}.$$

Quindi

$$\underline{0} = 0\underline{u}.$$

□

5) Legge di annullamento del prodotto.

$$a\underline{u} = \underline{0} \iff a = 0 \text{ oppure } \underline{u} = \underline{0}.$$

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$)

Se $a = 0$, allora

$$a\underline{u} = 0\underline{u} = \underline{0}$$

per la proprietà (4).

Se $\underline{u} = \underline{0}$, allora

$$a\underline{u} = a\underline{0} = \underline{0}$$

per la proprietà (3).

($\Longrightarrow$)

Sia

$$a\underline{u} = \underline{0}.$$

Se $a = 0$, allora

$$a\underline{u} = 0\underline{u} = \underline{0}$$

per la proprietà (4), e quindi vale l'alternativa $a = 0$.

Se $a \neq 0$, poiché a è un numero reale non nullo, esiste il suo inverso moltiplicativo $\frac{1}{a}$. Moltiplicando entrambi i membri per $\frac{1}{a}$, si ottiene

$$\frac{1}{a}(a\underline{u}) = \frac{1}{a}\underline{0}.$$

Per associatività del prodotto per numero,

$$\left(\frac{1}{a}a\right)\underline{u} = \underline{0}.$$

Poiché $\frac{1}{a}a = 1$, segue

$$1\underline{u} = \underline{0}.$$

Per la proprietà dell'elemento neutro del prodotto,

$$1\underline{u} = \underline{u},$$

quindi

$$\underline{u} = \underline{0}.$$

□

6) Regole dei segni

Dimostrazione. Consideriamo la somma

$$a\underline{u} + (-a)\underline{u}.$$

Per la proprietà (8) (distributività rispetto alla somma tra numeri), si ha

$$a\underline{u} + (-a)\underline{u} = (a + (-a))\underline{u}.$$

Poiché $a + (-a) = 0$, segue

$$(a + (-a))\underline{u} = 0\underline{u}.$$

Per la proprietà (4),

$$0\underline{u} = \underline{0}.$$

Quindi

$$a\underline{u} + (-a)\underline{u} = \underline{0}.$$

Per unicità dell'opposto, si conclude

$$(-a)\underline{u} = -(a\underline{u}).$$

□

7) Equazione lineare in V.

Sia $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in V$ l'equazione

$$a\underline{x} + \underline{u} = \underline{v}$$

ammette un'unica soluzione $\underline{x} \in V$, data da

$$\underline{x} = \frac{1}{a}(\underline{v} - \underline{u}).$$

Dimostrazione. **Esistenza.**

Poniamo

$$\underline{x} = \frac{1}{a}(\underline{v} - \underline{u}).$$

Allora

$$a\underline{x} = a\left(\frac{1}{a}(\underline{v} - \underline{u})\right) = \left(a\frac{1}{a}\right)(\underline{v} - \underline{u}) = 1(\underline{v} - \underline{u}) = \underline{v} - \underline{u}.$$

Quindi

$$a\underline{x} + \underline{u} = (\underline{v} - \underline{u}) + \underline{u} = \underline{v}.$$

Unicità.

Siano $\underline{x}, \underline{y} \in V$ tali che

$$\begin{cases} a\underline{x} + \underline{u} = \underline{v} \\ a\underline{y} + \underline{u} = \underline{v} \end{cases}$$

Allora

$$a\underline{x} + \underline{u} = a\underline{y} + \underline{u}.$$

Sommiamo $-\underline{u}$ a entrambi i membri:

$$a\underline{x} = a\underline{y}.$$

Moltiplichiamo per $\frac{1}{a}$:

$$\frac{1}{a}(a\underline{x}) = \frac{1}{a}(a\underline{y}).$$

Per associatività,

$$\left(\frac{1}{a}a\right)\underline{x} = \left(\frac{1}{a}a\right)\underline{y}.$$

Poiché $\frac{1}{a}a = 1$, segue

$$1\underline{x} = 1\underline{y}.$$

Quindi

$$\underline{x} = \underline{y}.$$

□

Esercizio 1.3. Siano $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n \in V$ e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_1 \neq 0$.
Dimostrare che, se

$$a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + \ldots + a_n\underline{u}_n = \underline{0},$$

allora

$$\underline{u}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\underline{u}_2 - \frac{a_3}{a_1}\underline{u}_3 - \ldots - \frac{a_n}{a_1}\underline{u}_n.$$

Svolgimento.
Sia

$$a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + \ldots + a_n\underline{u}_n = \underline{0}, \qquad a_1 \neq 0.$$

Sommiamo l'opposto di $a_2\underline{u}_2 + \cdots + a_n\underline{u}_n$ a entrambi i membri (usando le regole dei segni, proprietà (6)):

$$a_1\underline{u}_1 = -(a_2\underline{u}_2 + \ldots + a_n\underline{u}_n).$$

Poiché $a_1 \neq 0$, per la proprietà (7) possiamo moltiplicare per $\frac{1}{a_1}$ e otteniamo

$$\underline{u}_1 = \frac{1}{a_1}\Big(-(a_2\underline{u}_2 + \ldots + a_n\underline{u}_n)\Big).$$

Per le regole dei segni (proprietà (6)),

$$\underline{u}_1 = -\frac{1}{a_1}\big(a_2\underline{u}_2 + \ldots + a_n\underline{u}_n\big).$$

Applicando la distributività rispetto alla somma di vettori (proprietà (7)) e la distributività rispetto alla somma di numeri (proprietà (8)), segue

$$\underline{u}_1 = -\left(\frac{a_2}{a_1}\underline{u}_2 + \frac{a_3}{a_1}\underline{u}_3 + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\underline{u}_n\right).$$

Infine, usando ancora le regole dei segni (proprietà (6)),

$$\underline{u}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\underline{u}_2 - \frac{a_3}{a_1}\underline{u}_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\underline{u}_n.$$

1.6 Esempi di spazi vettoriali

Esempio 1.4. Sia $V = \{*\}$ un insieme costituito da un solo elemento.

Definiamo le operazioni su V ponendo

$$* + * = *, \qquad a* = * \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.$$

Allora $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Infatti l'unico elemento $*$ svolge il ruolo di vettore nullo, cioè

$$\underline{0} = *,$$

e coincide con il proprio opposto:

$$-* = *.$$

Questo spazio si chiama **spazio nullo**.

Esempio 1.5. Lo spazio $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, con le operazioni usuali di somma e moltiplicazione per numero reale, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

In questo caso:

$$\underline{0} = 0, \qquad \underline{u} = x \text{ con } x \in \mathbb{R}, \qquad -\underline{u} = -x.$$

Infatti la somma e il prodotto per numero soddisfano tutti gli assiomi di spazio vettoriale.

Esempio 1.6. Lo spazio $\mathbb{R}^2$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \ : \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Un elemento generico di $\mathbb{R}^2$ si scrive

$$\underline{x} = (x_1, x_2),$$

dove x_1 è la prima componente e x_2 la seconda componente.

Due vettori sono uguali se e solo se coincidono componente per componente:

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2. \end{cases}$$

Ad esempio,

$$(1, 0), \quad (0, 0), \quad (\sqrt{7}, -21) \in \mathbb{R}^2.$$

Attenzione.

$$(1, 0) \neq (0, 1).$$

Le operazioni sono definite componente per componente:

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \ x_2 + y_2),$$

$$a\underline{x} = (ax_1, \ ax_2), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Con queste operazioni, $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Il vettore nullo è

$$\underline{0} = (0, 0),$$

poiché

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2).$$

L'opposto di $\underline{x} = (x_1, x_2)$ è

$$-\underline{x} = (-x_1, -x_2).$$

.

1.6.1 Verifica degli assiomi in $\mathbb{R}^2$

Mostriamo che le operazioni definite componente per componente soddisfano gli assiomi di spazio vettoriale.

Associatività della somma.
Siano

$$\underline{x} = (x_1, x_2), \qquad \underline{y} = (y_1, y_2), \qquad \underline{z} = (z_1, z_2).$$

Allora

$$(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2) + (z_1, z_2) = ((x_1 + y_1) + z_1,\ (x_2 + y_2) + z_2).$$

Poiché l'addizione in $\mathbb{R}$ è associativa,

$$((x_1 + y_1) + z_1,\ (x_2 + y_2) + z_2) = (x_1 + (y_1 + z_1),\ x_2 + (y_2 + z_2)).$$

Quindi

$$(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}).$$

Altre proprietà.
Le restanti proprietà (elemento neutro, opposto, distributività e associatività del prodotto per numero) si verificano analogamente, poiché discendono dalle corrispondenti proprietà valide in $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.7. Calcolare le componenti del seguente vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\underline{x} = 2(-1, 3) + \sqrt{7}(1, -\sqrt{7}) - 5(0, 1).$$

Svolgimento.
Calcoliamo separatamente i prodotti per numero:

$$2(-1, 3) = (-2, 6), \qquad \sqrt{7}(1, -\sqrt{7}) = (\sqrt{7}, -7), \qquad -5(0, 1) = (0, -5).$$

Sommiamo ora componente per componente:

$$\underline{x} = (-2, 6) + (\sqrt{7}, -7) + (0, -5) = (\sqrt{7} - 2,\ -6).$$

1.7 Lo spazio $\mathbb{R}^n$

Fissato un intero $n \geq 0$, si definisce una **n-pla di numeri reali** come un elemento della forma

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

Le componenti si dicono:

- prima componente: x_1,
- seconda componente: x_2,
- ...
- n-esima componente: x_n.

Due n-ple

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n), \qquad \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

sono uguali se e solo se

$$\underline{x} = \underline{y} \iff x_i = y_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Si definisce

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

In altre parole, $\mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con sé stesso n volte.

Esempio 1.8. Nel caso $n = 3$ si ha

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Per esempio, sono elementi di $\mathbb{R}^3$:

$$(0,0,0), \quad (1,0,0), \quad (-\sqrt{7}, 54, 21), \quad (\pi, e, -3).$$

Si osservi che

$$(1,0,0) \neq (0,1,0),$$

poiché le componenti non coincidono ordinatamente.

Su $\mathbb{R}^n$ si definiscono le operazioni:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.9. La struttura algebrica $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

Il vettore nullo è

$$\underline{0} = (0, \dots, 0),$$

e l'opposto di $(x_1, \dots, x_n)$ è

$$-(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Esercizio 1.10. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ calcolare le componenti della combinazione lineare

$$\underline{x} = 2(1,0,0) - \sqrt{5}(0,-1,0) + 8(0,0,1).$$

Svolgimento.
Applicando le definizioni:

$$\underline{x} = (2,0,0) + (0, \sqrt{5}, 0) + (0,0,8) = (2, \sqrt{5}, 8).$$

Pertanto:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = \sqrt{5}, \qquad x_3 = 8.$$

1.8 Lo spazio delle matrici $\mathcal{M}(m,n)$

Fissati $m, n \geq 1$, una **matrice** con m righe ed n colonne è una tabella rettangolare

$$A = (a_{ij}), \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono uguali se e solo se

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \text{per ogni } i, j.$$

Si definisce **l'insieme di tutte le matrici reali con m righe e n colonne**

$$M(m,n) := \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Esempio 1.11. Nel caso $m = 2$ e $n = 3$ si ha

$$\mathcal{M}(2,3) = \{A = (a_{ij}) \mid i = 1,2,\ j = 1,2,3\}.$$

Un elemento generico di $\mathcal{M}(2,3)$ ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Per esempio,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \sqrt{7} & 5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,3).$$

Le operazioni sono definite componente per componente:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}),$$
$$aA := (a\, a_{ij}), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.12. La struttura $(\mathcal{M}(m,n), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

La matrice nulla è la matrice con tutte le componenti nulle. L'opposto di $A = (a_{ij})$ è $-A = (-a_{ij})$.

Esercizio 1.13. Nello spazio $\mathcal{M}(2,3)$ calcolare le componenti della seguente combinazione lineare:

$$(a_{ij}) = A = -2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.
Calcoliamo separatamente i tre termini.

$$-2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$-\sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sommiamo ora termine a termine:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 & 4 \\ 3 + 2\sqrt{2} & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osservazione 1.14. Si osservi che possiamo identificare $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{M}(n,1)$ e $\mathbb{R}^m$ con $\mathcal{M}(1,m)$.

Infatti, un vettore

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

può essere visto come la matrice colonna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n,1),$$

mentre un vettore

$$(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

può essere visto come la matrice riga

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(1,m).$$

Le operazioni di somma e di prodotto per numero coincidono componente per componente.

1.9 Lo spazio dei polinomi

Fissiamo dei numeri reali

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \qquad (n \geq 0).$$

Si definisce **polinomio** (nella variabile t) la funzione

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto p(t) := a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n.$$

Osservazione 1.15. Nel polinomio

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

il coefficiente a_0 si chiama **termine noto** del polinomio.

Se $a_n \neq 0$, allora si dice che p ha **grado** n e si scrive

$$\deg p = n.$$

In questo caso il numero a_n si chiama **coefficiente direttore** di p.

Osservazione 1.16. Il **polinomio nullo** è la funzione

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto 0,$$

cioè $p(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per convenzione, il polinomio nullo **non ha grado**.

Teorema (Principio di identità dei polinomi). (solo enunciato)
Siano
$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, \qquad q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_k t^k.$$
Allora
$$p(t) = q(t) \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}$$
se e solo se
$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots$$
cioè i coefficienti dei due polinomi coincidono ordinatamente.

> Indichiamo con $\mathbb{R}[t]$ l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti reali.

Su $\mathbb{R}[t]$ definiamo le seguenti operazioni.
Siano
$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, \qquad q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_k t^k,$$
e sia $c \in \mathbb{R}$.

Somma di polinomi
$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots$$

Prodotto per uno scalare
$$c\,p(t) = ca_0 + ca_1 t + \ldots + ca_n t^n$$

Osservazione 1.17. Con queste operazioni la struttura algebrica
$$(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$$
è uno spazio vettoriale.

Il vettore nullo è il polinomio nullo $p(t) = 0$, mentre l'opposto del polinomio
$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$
è
$$-p(t) = (-a_0) + (-a_1)t + \ldots + (-a_n)t^n.$$

Esercizio 1.18. Calcolare i coefficienti del polinomio
$$p(t) = -3(1 + t^2) + 5(t - t^6) - (1 + t + t^3) + 4(5 - t - t^4) + 5t^6.$$

> **Svolgimento.**
> Sviluppiamo e raccogliamo i termini simili:
> $$\begin{aligned} p(t) &= (-3 - 3t^2) + (5t - 5t^6) + (-1 - t - t^3) + (20 - 4t - 4t^4) + 5t^6 \\ &= (-3 - 1 + 20) + (5t - t - 4t) + (-3t^2) + (-t^3) + (-4t^4) + (-5t^6 + 5t^6). \end{aligned}$$
> Quindi
> $$p(t) = 16 - 3t^2 - t^3 - 4t^4.$$
> Pertanto i coefficienti sono:
> $$a_0 = 16, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = -4, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = 0.$$
> Poiché $a_4 \neq 0$, il grado del polinomio è
> $$\deg p(t) = 4.$$

1.9.1 Lo spazio dei vettori geometrici